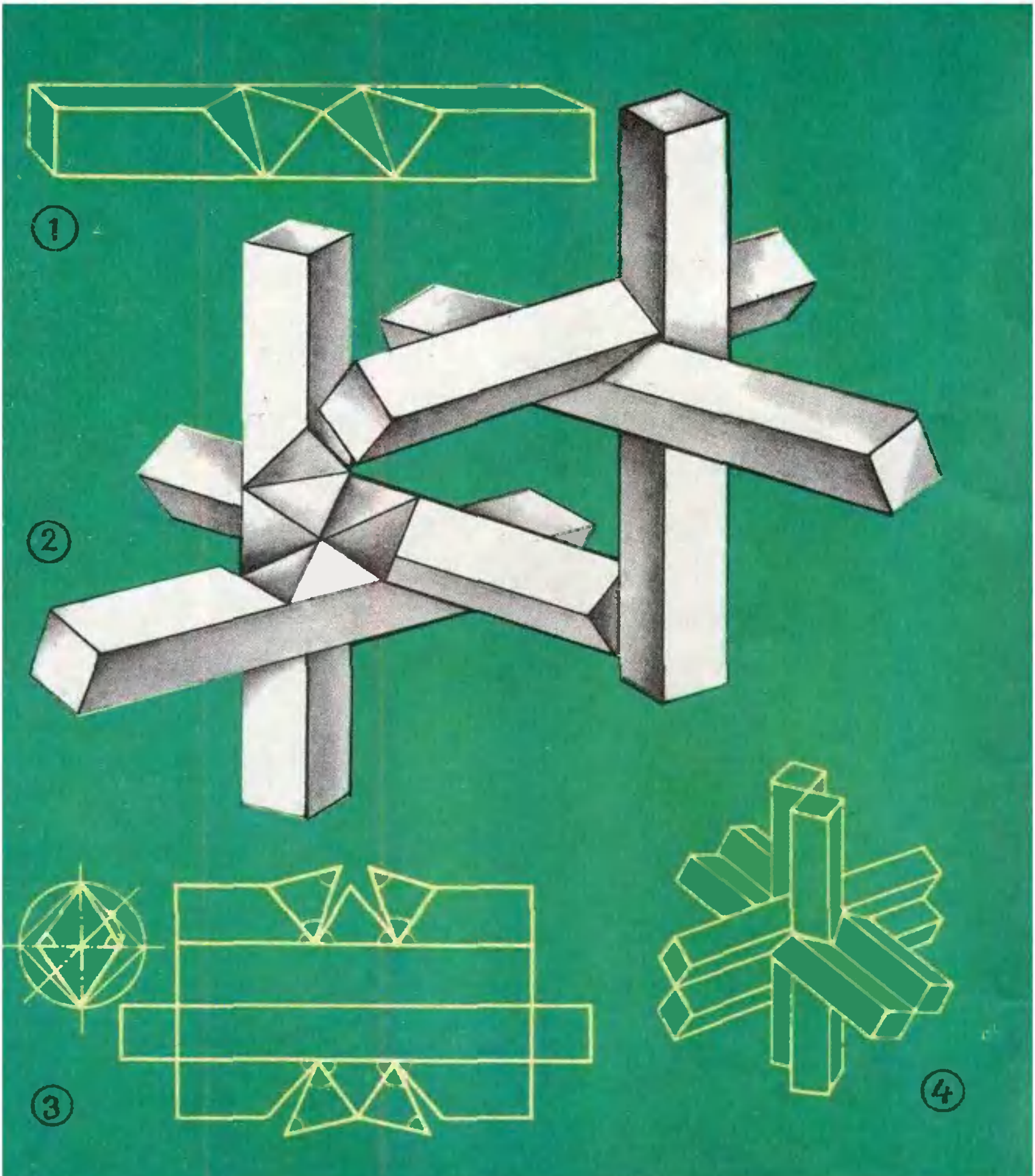
ISSN 0130-2221

Квант

6
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



В центре этого рисунка показана русская народная головоломка «шесть брусков» в полуразобранном виде ② . В собранном виде ④ эта конструкция кажется совсем жесткой, хотя бруски не склеены, не сбиты и не привинчены друг к другу. Нелегко угадать, за какие бруски и в какую сторону нужно тянуть, чтобы ее разобрать.

Головоломка составлена из шести одинаковых брусков с квадратным сечением и двумя поперечными врезами ① . По развертке ③ можно найти точные размеры врезов и либо склеить бруски из тонкого картона, либо изготовить их из дерева.

Другой вариант этой головоломки — с круглыми брусками — показан на первой странице обложки.

В. Гамаюнов, А. Холманских

Квант

6
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

В. Амбарцумян

Во имя расцвета науки нашей Родины

Одна из современных легенд говорит о юноше, который был начинающим исследователем в области теоретической физики. Он явился к своему руководителю А, ученому, отличавшемуся огромной научной инициативой и оригинальностью мысли, и получил от него тему для своего первого исследования и указания, с чего надо начать работу над предложенной темой. Юноша сел в самолет и прилетел в город, где жил другой крупный ученый — В, который прославился глубоким умением применять в теоретической физике математический аппарат. Молодой человек описал ему сущность своей темы и направление, с которого он собирается начать ее разработку. Тема очень понравилась В, он высоко оценил ее оригинальность и правильность выбора направления первых шагов. Более того, владея безукоризненной техникой исследования, он посоветовал, как именно лучше всего осуществить эту первую часть работы. Перенеся все это на бумагу, юноша полетел в третий город, где жил теоретик С, славившийся феноменальной эрудицией в той же области. Теоретик был восхищен как темой, так и выполнением первых шагов и, рассказав об ошибках, которые делались в прежние времена другими учеными, работавшими над аналогичными проблемами, дал ряд ценных советов. Юноша вернулся к А и доложил о достигнутых результатах. Весьма удовлетворенный успехом настойчивого юноши, А с удовольствием дал совет, как преодолеть очередные трудности и продвинуться вперед.

Предприимчивый молодой человек несколько раз повторил облет своих консультантов. Получилась весьма оригинальная, блещущая техникой исполнения и эрудицией работа, за которую ему были присуждены все степени и отличия, какие только может получить физик.

Академик Виктор Амазаспович Амбарцумян — дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Государственных премий, президент Академии наук Армянской ССР, директор Бюраканской астрофизической обсерватории.

Статья с небольшими сокращениями перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Легенда прибавляет только одну деталь. В разговоре с каждым из консультантов молодой ученый не распространялся о помощи, полученной от двух других. Из этой детали авторы легенды делали вывод, осуждающий ее героя.

Полностью присоединяясь к этому моральному осуждению, я хотел бы вместе с тем отметить, что юноша по сути дела показал некоторые качества, которые сами по себе не только не содержат ничего плохого, но были бы нелишни для многих организаторов науки.

В самом деле, как было бы хорошо, если бы существовало больше людей, которые умели бы объединять научные усилия ученых разного типа, привыкших работать изолированно друг от друга, и делали бы это не из каких-то «частнособственнических» или карьеристических интересов, а по долгу организаторов науки.

Обычно считают, что организатор науки должен удачно выбирать предмет исследования, подбирать нужные кадры, распределять среди них работу, снабжать их аппаратурой и находить пути применения законченной работы в жизни. Конечно, организатору науки нужно все это уметь.

Но, вероятно, нужно, чтобы он умел и активно сопоставлять между собой мысли разных авторов, объединять их знания и, глубоко вникая в сущность их мыслей, строить научные мозаики, объединяющие разнотипное творчество разных ученых.

При этом в самой работе такого организатора будет много творческих элементов.

Значит, если молодых людей с такими способностями, как у героя легенды, направить по правильному пути, то получится выигрыш в организации науки.

О вышеприведенной легенде я узнал как раз перед вводом в строй нового большого телескопа Бюраканской астрофизической обсерватории, в момент, когда сам остро нуждался в научной консультации. После первых испытаний необходимо было начать первую серию фотографических снимков неба с помощью нового инструмента. Зная, что два молодых сотрудника, не имевшие никаких ученых степеней, Армен Гюльбудагян и Тигран Магакьян только что успешно закончили поиски на картах известного Паломарского атласа неба очень слабых кометарных туманностей, не обнаруженных до тех пор другими астрономами, я обратился к ним с просьбой отобрать из числа найденных туманностей наиболее интересные объекты для включения в программу нового телескопа. И они показали мне в атласе объект, вид которого был совершенно нетипичен для кометарных туманностей. Последние обычно обращают на себя внимание наличием хвоста, или «веера», упирающегося вершиной в звезду. Здесь же была только звезда, не было никакого веера, и только на значительном расстоянии от звезды обозначался небольшой слабо светящийся «огрызок», связь которого со звездой мне показалась весьма проблематичной. Разочарованный первым впечатлением, я стал возражать, но, почувствовав убежденность своих сотрудников в необходимости исследования этого объекта, уступил и согласился на включение его в программу. Всю вторую половину дня, после их ухода, я упрекал себя за мягкость и уступчивость.

Через два или три дня мне принесли снимок этого объекта, полученный на большом телескопе Обсерватории. Светящегося «огрызка» уже не было. За два десятка лет, прошедших после снимков Паломарского атласа, он исчез, но зато к звезде примыкал роскошный, яркий веер, которого не было раньше и подробности строения которого были хорошо видны. Сама звезда также изменилась. Яркость ее сильно увеличилась, а цвет вместо красного стал голубым. Для нашей Обсерватории и для всей нашей астрономии это было счастливым открытием, так как у нас во все большей степени интерес сосредоточивается вокруг явлений изменчивости объектов и их нестационарности. Хотя изменчивость и раньше наблюдалась у некоторых кометарных туманностей (за последние сто лет отмечено четыре или пять случаев значительной изменчивости), но примера таких сильных изменений еще не было. Из архива Обсерватории сейчас же были извлечены другие снимки этой области неба и была восстановлена картина изменений на протяжении почти двадцати лет. Больше того, продолжение наблюдений на новом телескопе, спектральные исследования этого объекта дали интереснейшие результаты.

Не легенда, приведенная выше, а именно этот реальный случай, связанный с именами двух молодых астрофизиков, характерен для поведения нашей советской научной молодежи.

Размышления над изложенными выше небольшими историями дают мне повод высказать в адрес молодежи, идущей в науку, некоторые пожелания.

Прежде всего хочу пожелать ей быть смелой и готовой встретить все перемены в жизни и науке, все предстоящие трудности и неожиданности. Нужна смелость, и еще раз смелость.

В качестве второго требования я назвал бы интерес, всепоглощающий интерес и любовь к науке и основанную на этой любви преданность ей. Если не отдаваться науке целиком, то легко можно превратиться в неудачника от науки.

Но одного лишь интереса и даже любви недостаточно. Наука требует способностей. Я верю, что человек может развивать имеющиеся у него способности, но нужно, чтобы было что развивать.

Однако даже всех этих качеств, взятых вместе, недостаточно. Нужно гигантское трудолюбие. Тому, кто намерен ограничиваться официальными часами работы (скажем, восемь часов в день), я советовал бы не идти в науку. Иначе ему угрожает опасность стать ее прихлебателем.

Дело в том, что объем знаний, накопленный в науке, со временем быстро возрастает. Но это значит, что объем научного материала, которым мы должны владеть, возрастает такими же темпами. К этому следует добавить, что перекрещивание путей исследований требует постоянного расширения кругозора и привлечения знаний из все более отдаленных от твоей специальности областей. Все это требует напряженного труда и огромных затрат времени. Все большую важность приобретает сотрудничество между представителями разных специальностей, умение работать в коллективе.

Но и этого мало. Молодой ученый должен уметь на каждом этапе определять, в каком направлении ему следует идти, какое место в общей системе научной работы ему занять, как найти оптимальный путь использования своих возможностей и способностей. Здесь, конечно, все зависит от сложившихся в данную эпоху и в данной области науки конкретных условий. Но выбранное им решение будет тем более правильным, чем лучше при этом он учтет интересы страны и ее науки.

И еще один совет: в науке важно правильно оценивать свои силы. Крайне вредна их недооценка, но опасна также их чрезмерная переоценка. Тем не менее следует быть оптимистом, чтобы тебя не вывели из строя возможные и даже частые в науке неудачи. Надо уметь использовать и неудачи, находя в них ценные уроки.

Итак, все время учиться, учиться до последнего часа своей жизни, работать и работать до самозабвения, но все же никогда не забывать главного: ты работаешь для Родины, для ее расцвета, для ее науки.

В. Болтянский

Топология графов

Известный французский математик Андре Вейль сказал как-то, что за душу каждого математика борются «дьявол абстрактной алгебры и ангел топологии». В этой статье, посвященной графам, мы будем прислушиваться в первую очередь к голосу ангела топологии, хотя легкий на помине дьявол тоже скажет свое веское слово.

Граф (конечный) — это множество точек (*вершин* графа), соединенных — на плоскости или в пространстве — конечным числом дуг (*ребер* графа), причем дуги пересекаются только в вершинах*) (рис. 1). В большей части статьи для нас будет важно, что граф — это некоторая фигура (множество всех точек дуг); выделенные точки этой фигуры — вершины — мы будем часто игнорировать.

*) В общей теории графов принято несколько иное — «абстрактное» — определение графа (ср. «Квант», 1981, № 3, с. 18).

Какие графы одинаковы?

Ангел топологии считает одинаковыми *гомеоморфные графы* — такие графы G_1 и G_2, для которых существует непрерывное (без разрывов) и обратимое (без склеиваний) отображение $h\colon G_1 \to G_2$ множества G_1 на все множество G_2 (такое отображение называется *гомеоморфизмом**)).

*) При определении гомеоморфизма произвольных фигур требуется еще непрерывность обратного отображения h^{-1} (для конечных графов она выполняется автоматически, что нам шепнул на ухо без доказательства ангел топологии).

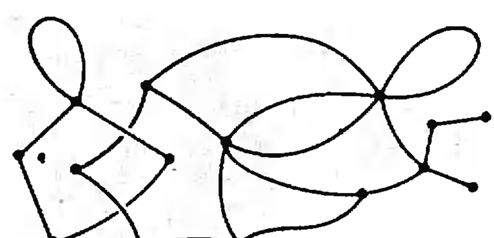


Рис. 1.

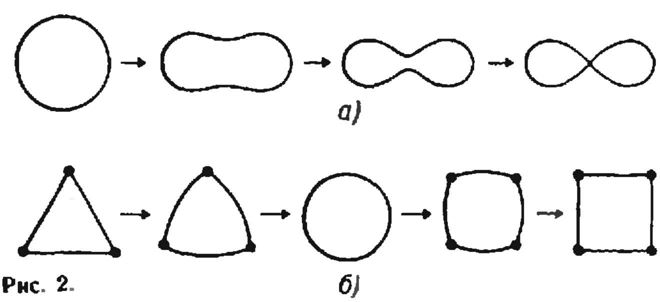


Рис. 2.

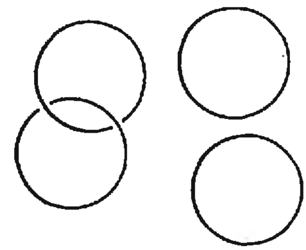


Рис. 3.

Из этого определения следует, что два графа гомеоморфны, в частности, если, как угодно изгибая и растягивая ребра, но не допуская разрывов и склеиваний, можно один из них наложить на другой. На рисунке 2, *а* показано, как можно окружность превратить в восьмерку; однако это не означает, что окружность и восьмерка гомеоморфны (ведь при этом превращении произошло склеивание двух точек). Окружность можно превратить и в полуинтервал, но для этого ее нужно р а з о р в а т ь и лишь потом распрямить. Поскольку разрывы не разрешены, такое превращение не будет гомеоморфизмом; к тому же, полуинтервал не является графом. А вот контур треугольника и контур квадрата гомеоморфны, и оба они гомеоморфны окружности, что показано на рисунке 2, *б*.

Заметим, что не всегда удается, как в этом примере, реализовать гомеоморфное отображение $h: G_1 \to G_2$ изгибанием, растяжением и сжатием графов в с а м о м п р о с т р а н с т в е. Так, пара зацепленных окружностей (рис. 3) гомеоморфна паре незацепленных, хотя в пространстве расцепить их, не разрывая, невозможно.

Как показывает пример с треугольником и квадратом, при гомеоморфизме вершина не обязана перейти в вершину. К этому мы еще вернемся.

П р и м е р 1. Будем представлять себе буквы русского алфавита в виде линий. Буквы Г, Л, М, П, С гомеоморфны между собой. Буквы Е, У, Т, Ч, Ш, Ц, Э также гомеоморфны между собой, но не гомеоморфны указанным ранее буквам. Буква О не гомеоморфна никакой другой букве русского алфавита *).

Поучительно сравнить понятие г о м е о м о р ф и з м а и понятие к о н г р у э н т н о с т и фигур. В геометрии рассматриваются перемещения, то есть отображения, сохраняющие расстояния между точками. Две фигуры, которые переводятся одна в другую («совмещаются») с помощью перемещения называются *конгруэнтными* и рассматриваются как одинаковые (с геометрической точки зрения). В топологии рассматриваются отображения более общие, чем перемещения, а именно *гомеоморфные отображения*, которые могут не сохранять расстояний, а сохраняют лишь непрерывность расположения точек в фигурах (не допускают разрывов и склеиваний). Поэтому две гомеоморфные между собой фигуры рассматриваются (с топологической точки зрения) как одинаковые.

Простейшие инварианты

Свойства фигур, которые сохраняются при переходе от фигуры к гомеоморфной ей фигуре, называются *топологическими свойствами* фигур, или *топологическими инвариантами* (от латинского слова invariant — неизменный). Изучением топологических свойств фигур и занимается топология.

Чаще всего применяют такие топологические инварианты, которые являются числами (или другими алгебраическими объеками), так как

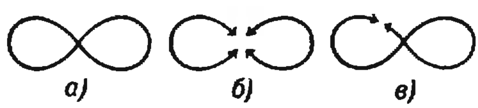


Рис. 4.

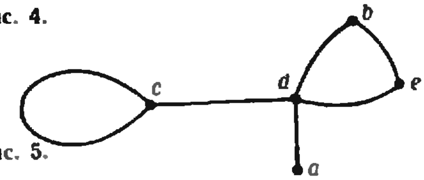


Рис. 5.

с такими инвариантами удобно обращаться. Используются они в основном для решения на первый взгляд безнадежной задачи: доказать, что две фигуры A и B не гомеоморфны.

Действительно, доказывая, что нечто можно простроить (у нас — гомеоморфизм $h: A \to B$), достаточно придумать о д и н вариант этого построения. А как доказать, что нечто н е л ь з я построить? Для этого нужно перебрать в с е в о з м о ж н ы е варианты построений (у нас — отображений $h: A \to B$) и проверить, что ни один вариант не годится (не является гомеоморфизмом). Но обычно отображений $h: A \to B$ бесконечно много, всех не проверишь. Как быть?

Здесь и помогают числовые инварианты. Пусть каждой фигуре A рассматриваемого класса приписывается число $q(A)$, причем гомеоморфным фигурам приписываются одно и то же число. Пусть фигуры A и B таковы, что $q(A) \neq q(B)$. Тогда они не могут быть гомеоморфными, нельзя построить гомеоморфизм $h: A \to B$!

Удивительная простота этого рассуждения скрывает его глубину и важность. Создается впечатление, что нас обманули, спрятав неизвестно куда трудность задачи. Это не удивительно: появились инварианты — числа, за которыми скрывается дьявол абстрактной алгебры, большой хитрец и мистификатор.

П р и м е р 2. Буква Ы представляет собой фигуру, состоящую из двух не связанных между собой частей. Большинство остальных букв русского алфавита состоит из одного связного куска (исключение составляют буквы Й, Ё). Число связных «кусков», из которых состоит фигура (говорят также: *число компонент* фигуры), является топологическим инвариантом. Поэтому буква Ы не гомомеоморфна, например, букве О, букве П, букве Ц и т. д.

П р и м е р 3. На восьмерке (рис. 4, *а*) имеется такая точка x, что после ее удаления (рис. 4, *б*) мы получаем н е с в я з н у ю фигуру (содержащую больше одной компоненты). Точку, обладающую этим свойством, называют *разбивающей* точкой фигуры. Никакая отличная от x точка восьмерки не является разбивающей (рис. 4, *в*).

Если точка x фигуры A является разбивающей, она остается таковой при любом гомеоморфизме фигуры A, аналогично — для неразбивающей точки. Поэтому ч и с л о разбивающих точек данной фигуры есть ее топологический инвариант, число неразбивающих точек — также топологический инвариант.

З а д а ч и

1. Для каждой из букв русского алфавита укажите, сколько разбивающих и неразбивающих точек она содержит. Докажите, что буквы О, Г, Т, Ь попарно не гомеоморфны.

2. Докажите, что для любого натурального n существует фигура, содержащая ровно n разбивающих точек, а также фигура, содержащая ровно n неразбивающих точек.

П р и м е р 4. Пусть A — граф и x — его вершина. Число ребер графа A, сходящихся в x, называется *индексом* вершины x в графе A (при этом *петля* — ребро с началом и концом в одной и той же вершине x — считается за два ребра, ибо она входит в x двумя своими концами). На рисунке 5 вершины a, b, c, d имеют индексы 1, 2, 3, 4 соответственно. Число вершин индекса $n \neq 2$, содержащихся в графе, — топологический инвариант. Почему приходится исключать вершины индекса 2?

З а д а ч и

3. Докажите, что буквы Ю и Ф не гомеоморфны. У к а з а н и е. Воспользуйтесь тем, что число вершин индекса k $(k \neq 2)$ является инвариантом.

4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие, при выполнении которого фигура, составленная из конечного числа дуг, гомеоморфна окружности.

5. Пусть G — граф. Через $a_k(G)$ обозначим число вершин этого графа, имеющих индекс k. Докажите, что число ребер графа G

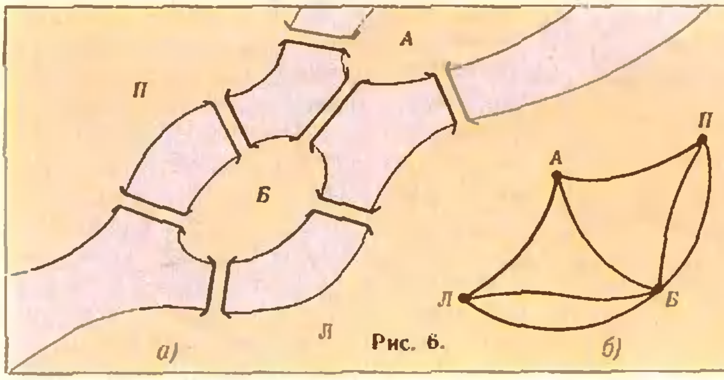


Рис. 6.

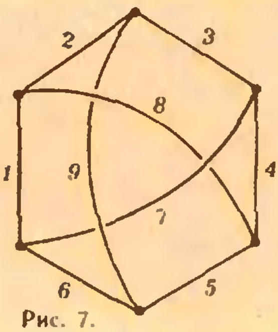


Рис. 7.

равно

$$\frac{1}{2}\left(a_1(G)+2a_2(G)+3a_3(G)+\ldots\right).$$

6. Докажите, что во всяком графе число вершин, имеющих нечетный индекс, четно.

Кёнигсбергские мосты

Граф называется *уникурсальным* (или эйлеровым), если его можно «нарисовать одним росчерком», то есть обойти его весь непрерывным движением, не проходя одно и то же ребро дважды. Свойство графа быть уникурсальным является, очевидно, топологическим инвариантом. Однако этот топологический инвариант не является новым, а выражается через понятие индекса вершины (см. задачу 9).

Задачи

7. Докажите, что если каждая вершина графа имеет индекс, не меньший двух, то из ребер этого графа можно составить линию, гомеоморфную окружности.

8. Докажите, что если все вершины связного графа имеют четный индекс, то этот граф можно «нарисовать одним росчерком», начав движение из произвольной вершины и возвратясь в ту же вершину.

9. Докажите, что связный граф тогда и только тогда уникурсален, когда он содержит не больше двух вершин нечетного индекса.

С уникурсальными графами связана задача о кёнигсбергских мостах, рассмотренная еще Эйлером. В то время в Кёнигсберге было семь мостов через реку Прегель (рис. 6, *а*). Задача состоит в том, чтобы выяснить, можно ли, прогуливаясь по городу, пройти через каждый мост точно по одному разу. Сопоставим с планом города некоторый граф: вершина *Л* обозначает левый берег, *П* — правый берег, *А* и *Б* — острова, а ребра графа соответствуют мостам (рис. 6, *б*). В этом графе все четыре вершины имеют нечетный индекс. Следовательно, граф не уникурсален, и потому требуемого маршрута не существует.

Задачи

10. Докажите, что, добавив еще один мост (где угодно на плане рисунка 6, *а*), мы получим схему города, по которому можно пройти через каждый мост ровно по одному разу.

11. *Полным графом* называется граф без петель, у которого любые две вершины соединены ровно одним ребром. В каком случае полный граф уникурсален?

Как построить связный граф

Всякий граф можно «построить», добавляя одно ребро за другим (разумеется, при этом нужно будет отмечать и вершины графа). Нумерация ребер графа на рисунке 7 выбрана так, что при вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы. Если бы, однако, мы занумеровали ребра в обратном порядке, то при вычерчивании у нас сначала получался бы несвязный граф. Оказывается, *во всяком связном графе существует такая нумерация ребер, что при вычерчивании графа в соответствии с этой нумерацией все время получаются связные графы*. Это утверждение можно назвать «теоремой о вычерчивании связных графов».

Задачи

12. Докажите, что любой связный граф можно «нарисовать одним расчерком», если разрешить проходить каждое ребро ровно два раза.

13. Выведите из утверждения предыдущей задачи теорему о вычерчивании связных графов.

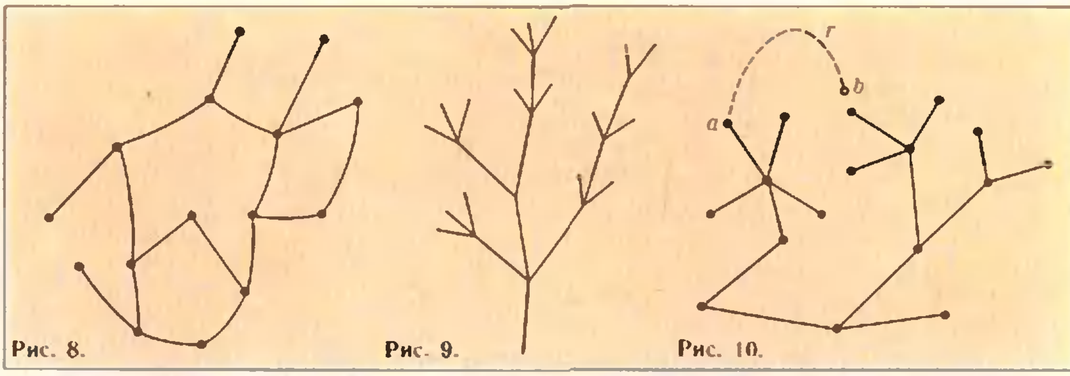


Рис. 8. Рис. 9. Рис. 10.

14. Докажите, что любые две вершины связного графа G можно соединить в G *простой цепочкой* ребер — такой цепочкой, что объединение ребер этой цепочки представляет собой линию, гомеоморфную отрезку.

Сколько деревьев в лесу?

Контуром в графе называется замкнутая цепочка ребер, объединение которых представляет собой линию, гомеоморфную окружности (рис. 8). Связный граф, не содержащий ни одного контура, называется *деревом* (рис. 9). Докажем, что *в любом дереве число вершин и число ребер P связаны соотношением*

$$\boxed{B-P=1.} \qquad (1)$$

Для доказательства проведем индукцию по числу ребер P. При $P=1$ (дерево состоит только из одного ребра и имеет две вершины) соотношение (1) справедливо. Предположим, что для любого дерева, имеющего n ребер, соотношение (1) уже доказано, и пусть G — дерево, имеющее $n+1$ ребер. Так как граф G — связный, его можно получить из некоторого с в я з н о г о графа G' добавлением одного ребра r. Граф G' содержит n ребер и тоже является деревом (почему?). По предположению индукции соотношение (1) для графа G' справедливо, и потому в нем имеется $n+1$ вершин. Заметим теперь, что только о д и н конец добавляемого ребра r является вершиной графа G' (иначе, в силу задачи 14, при добавлении ребра r в графе G появился бы контур — см. рис. 10). Следовательно, при добавлении ребра r в графе G появляется о д н о новое ребро и о д н а новая вершина. Иначе говоря, в графе G имеется $n+2$ вершин и $n+1$ ребер, и потому соотношение (1) для него справедливо. Проведенная индукция доказывает равенство (1) для любого дерева.

Разность $B-P$ называется *эйлеровой характеристикой* графа G и обозначается через $\chi(G)$. Таким образом, равенство (1) означает, что *эйлерова характеристика любого дерева равна 1.*

Задачи

15. Граф, не содержащий контуров, называется *лесом*. Ясно, что если граф G представляет собой лес, то каждая его компонента является деревом. Докажите, что если G — лес, то число деревьев, которые «растут» в лесу (то есть число компонент графа G), равно $\chi(G)$.

16. Докажите, что если граф G является деревом, то каждые две его вершины могут быть соединены только одной простой цепочкой. Верно ли обратное?

Максимальное дерево и системы токов

Пусть теперь G — связный граф, не являющийся деревом. Тогда в G имеется контур; пусть r_1 — какое-либо ребро, входящее в этот контур (рис. 11, *а*). Удалив из G ребро r_1, мы получим с в я з н ы й граф G' (поскольку концы выброшенного

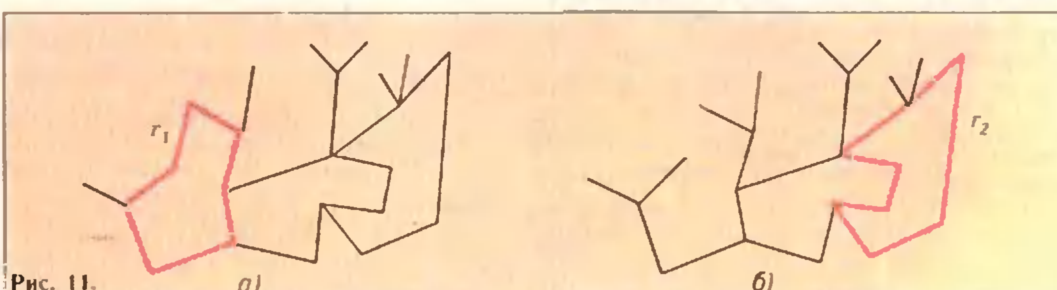


Рис. 11.

ребра r соединены в G' простой цепочкой — оставшейся частью контура), причем вершины у графа G' — те же, что и у G. Если G' еще не является деревом, то есть в G' также имеется контур (рис. 11 *б*), то мы можем взять произвольное ребро r_2 этого контура и, выбросив его, получить связный граф G'' с теми же вершинами, что и у G, и т. д. Так как число ребер конечно, этот процесс должен на каком-то шаге остановиться; иначе говоря, после выбрасывания какого-то ребра r_k мы получим связный граф G^*, содержащий все вершины графа G и уже не имеющий контуров, то есть являющийся деревом. Граф G^* называется *максимальным деревом* графа G, а ребра $r_1, r_2, \ldots, r_k$, которые пришлось выбросить из G, чтобы получить максимальное дерево G^*, называются *перемычками*.

Если B — число вершин графа G, то максимальное дерево G^* тоже имеет B вершин. Согласно (1), граф G^* имеет $B-1$ ребер, и потому число ребер графа G равно $B-1+k$ (чтобы из G^* получить G, надо «возвратить» k выброшенных ребер-перемычек). Следовательно,

$$\chi(G)=B-(B-1+k)=1-k. \quad (2)$$

Так как $k\geqslant 1$, получаем $\chi(G)\leqslant 0$. Таким образом, учитывая (1), мы видим, что *для любого связного графа G справедливо соотношение*

$$\boxed{\chi(G)\leqslant 1,}$$

причем равенство достигается в том и только в том случае, когда G — дерево.

Далее, согласно (2), число перемычек равно

$$k=1-\chi(G).$$

Задачи

17. Докажите, что если граф G содержит l компонент, то $\chi(G)\leqslant l$. В каком случае достигается равенство?

18*. Будем говорить, что в графе G задана *система токов*, если каждому ребру приписано направление (указываемое стрелкой) и некоторое неотрицательное число (ток), причем выполняется *правило Кирхгофа:* для каждой вершины сумма входящих в нее токов равна сумме исходящих. Докажите, что если граф является деревом, то в нем существует только *тривиальная* система токов (все токи равны нулю).

19. Пусть G — связный граф, G^* — его максимальное дерево, а $r_1, r_2, \ldots, r_k$ — перемычки (то есть ребра графа G, не содержащиеся в G^*). Докажите, что если произвольно задать токи на ребрах $r_1, r_2, \ldots, r_k$, то их можно однозначно дополнить токами на остальных ребрах так, чтобы получилась система токов в G.

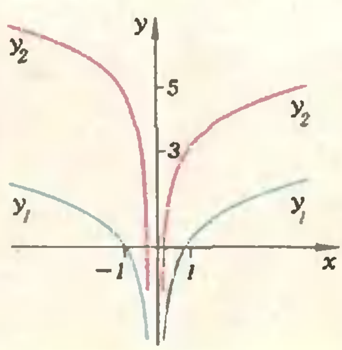
Указание. Для каждой перемычки r_i существует единственный контур, содержащий ее и не содержащий других перемычек. Если пустить по этому контуру ток такой величины и направления, как указано на перемычке r_i, а затем взять сумму всех этих «контурных токов», то мы и получим требуемую систему токов на графе G. Если бы существовали две различные системы токов, совпадающие на перемычках, то их разность была бы нетривиальной системой токов на дереве G^*.

Итак, экскурсия по теории графов, проведенная под крылом ангела топологии, оказалась полезной для решения математических и даже физических задач. Мы надеемся, что она была приятной и вы захотите ее продолжить. В следующем номере журнала мы остановимся на более глубоких вопросах топологии графов. Но для их изучения нам придется более внимательно прислушаться к «дьяволу абстрактной алгебры».

В чем дело?

Согласно «основному свойству первообразной» («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 57), если производные двух функций совпадают, то эти функции должны отличаться на константу. Производные функций:

а) $y_1=\dfrac{1}{1-x^2}$ и $y_2=\dfrac{x^2}{1-x^2}$,



б) $y_1=\ln|x|$ и

$$y_2=\begin{cases}\ln x+3, \text{ если } x>0,\\ \ln(-x)+5, \text{ если } x<0\end{cases}$$

(см. рисунок), совпадают. С другой стороны, в случае а) функция y_2 получается умножением функции y_1 на x^2, а в случае б) функции y_2 и y_1 отличаются на разных промежутках на разные константы. В чем дело?

Н. Александров, Н. Смирнов

Ю. Брук, А. Стасенко

Метод размерностей помогает решать задачи

В физике... нет места для путаных мыслей... Действительно понимающие природу того или иного явления должны получать основные законы из соображений размерности.

Э. Ферми

Введение. Основные идеи

Едва ли не каждое выступление на научных семинарах или конференциях, где обсуждаются новые теоретические или экспериментальные работы, начинается с качественого описания и оценки того эффекта, о котором хочет рассказать выступающий. Даже в очень подробном докладе, лекции или статье нет возможности рассказать обо всех экспериментальных деталях или всех теоретических хитростях, которые были существенны для выполнения самой работы, для решения той или иной задачи. Но есть вопросы, о которых нужно сказать всегда, не дожидаясь вопросов слушателей или читателей.

К таким вопросам всегда и прежде всего относятся оценка порядка величины ожидаемого эффекта, простые предельные случаи и характер функциональной связи определяющих явление величин. Все эти вопросы тесно связаны друг с другом, анализ их и есть по существу то, что мы называем качественным описанием физической ситуации.

Одним из наиболее эффективных методов такого анализа является метод размерностей. Мы рассмотрим в этой статье его основы. Не будет преувеличением сказать, что метод размерностей обладает «максимальным КПД», экономя горы бумаги теоретикам, деньги и время экспериментаторам. Быстрая оценка масштабов исследуемых явлений, построение принципиальной схемы эксперимента, получение качественных и функциональных зависимостей, восстановление забытых формул на экзаменах — таковы лишь некоторые достоинства и приложения метода размерностей.

Анализ размерностей применяется в физике еще со времен Ньютона. Именно Ньютон сформулировал тесно связанный с методом размерностей принцип подобия, который мы и проиллюстрируем сейчас на совсем простом и хорошо понятном примере.

Представим себе, что тело с массой m перемещается прямолинейно под действием постоянной силы F. Если начальная скорость тела равна нулю, а скорость в конце пройденного отрезка длиной s равна v, то мы можем написать равенство, выражающее закон сохранения энергии: $mv^2/2=Fs$. Между величинами v, F, m и s существует, таким образом, функциональная связь.

Предположим теперь, что мы не знаем пока закона сохранения энергии (или не хотим его использовать), но знаем, что функциональная зависимость между v, F, m и s существует. Очень часто (но, конечно, не всегда!) функциональная зависимость физических величин имеет степенной характер. Допустим, что и в нашем примере это так. Можно сказать это же другими словами: мы считаем, что формула, определяющая скорость v как функцию F, m и s, имеет степенной вид

$$v\sim F^x m^y s^z. \qquad (*)$$

Здесь x, y и z — некоторые числа, которые нам предстоит еще определить. Знак $\sim$ означает, что левая часть формулы пропорциональна правой, то есть $v=kF^x m^y s^z$, где k — числовой коэффициент. Поскольку k — величина безразмерная, определить этот коэффициент с помощью метода размерностей, естественно, нельзя.

Левая и правая части соотношения (*) должны, конечно, измеряться одними и теми же единицами, то есть иметь одинаковые размерности. Будем измерять v в «м/с», F — в «Н», m — в «кг» и s — в «м». Иными словами, размерности величин v, F, m и s выберем такими: $[v]$ = м/с = м · с$^{-1}$, $[F]$ = Н = кг · м · с$^{-2}$, $[m]$ = кг, $[s]$ = м. (Символ $[A]$ обозначает размерность величины A.) Запишем условие того, что размерности левой и правой частей соотношения (*) одинаковы:

$$\text{м}\cdot\text{с}^{-1}=\text{кг}^x\cdot\text{м}^x\cdot\text{с}^{-2x}\cdot\text{кг}^y\cdot\text{м}^z=\text{кг}^{x+y}\cdot\text{м}^{x+z}\cdot\text{с}^{-2x}.$$

Заметьте, что сейчас мы написали уже равенство. В левой части вообще нет килограммов, поэтому и справа их быть не должно. Это значит, что

$$x+y=0.$$

Справа метры входят в степени $x+z$, а слева — в степени 1, поэтому

$$x+z=1.$$

Аналогично, из сравнения показателей степени при секундах следует

$$-2x=-1.$$

Полученные нами уравнения дают возможность найти числа x, y и z:

$$x=1/2,\quad y=-1/2,\quad z=1/2.$$

Теперь нам осталось записать окончательную формулу

$$v\sim\left(\frac{F}{m}\right)^{1/2}s^{1/2}.$$

Возведя в квадрат левую и правую части этого соотношения, мы найдем, что $v^2\sim\frac{F}{m}s$, или $mv^2\sim Fs$. В последней формуле читатель без труда узнает закон сохранения энергии, правда, без числового коэффициента.

Принцип подобия, сформулированный Ньютоном, заключается в том, что отношение v^2/s прямо пропорционально отношению F/m. Возьмем, например, два тела с разными массами m_1 и m_2; будем действовать на них разными силами F_1 и F_2, но такими, что отношения F_1/m_1 и F_2/m_2 будут одинаковыми. Под действием этих сил тела начнут двигаться. Если начальные скорости тел равны нулю, то скорости, приобретаемые телами на отрезке пути длины s, будут равны. Мы пришли к закону подобия с помощью идеи о равенстве размерностей правой и левой частей формулы, описывающей степенную связь значения конечной скорости со значениями силы, массы и длины пути.

Нелишне упомянуть здесь о том, что, хотя метод размерностей был по существу введен уже при построении основ классической механики, его эффективное применение для решения физических задач началось в конце прошлого — в начале нашего века. Большая заслуга в пропаганде этого метода и решении с его помощью ряда интересных и важных задач принадлежит выдающемуся физику Джону Вильяму Стрэтту (лорду Рэлею). В 1915 году Рэлей писал: «Я часто удивляюсь тому незначительному вниманию, которое уделяется великому принципу подобия даже со стороны весьма крупных ученых. Нередко случается, что результаты кропотливых исследований преподносятся как вновь открытые «законы», которые, тем не менее, можно было получить априорно в течение нескольких минут».

В наши дни физиков уже нельзя упрекнуть в пренебрежительном отношении или недостаточном внимании к принципу подобия и к методу размерностей. Мы разберем ниже две классические задачи, часто называемые задачами Рэлея. Задач, рассмотренных Рэлеем, в том числе и с помощью соображений размерности, конечно, намного больше, но те, о которых мы расскажем, довольно типичны. На этих и других примерах мы и познакомимся подробнее с тем, когда и как можно использовать для решения задач метод размерностей.

Задача Рэлея о колебаниях шарика на струне

Пусть между точками A и B натянута струна. Сила натяжения струны F. На середине этой струны в точке C находится тяжелый шарик. Длина отрезка AC (и соответственно CB) равна l. Масса M шарика намного больше массы самой струны. Струну оттягивают и отпускают. Довольно ясно, что шарик будет совершать колебания. Если амплитуда этих колебаний много меньше длины струны, то процесс будет гармоническим.

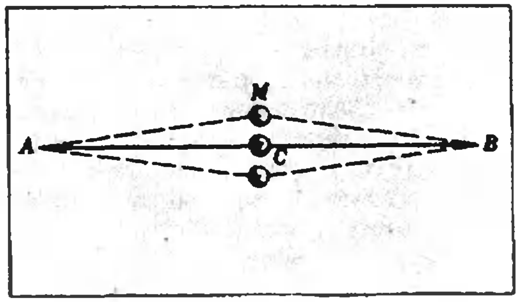


Рис. 1.

Рэлей показал, как найти зависимость частоты этих колебаний ω от натяжения струны F, массы шарика M и размера l. Мы воспроизведем сейчас его рассуждение.

Предположим, что величины ω, F, M и l связаны степенной зависимостью:

$$\omega \sim F^x M^y l^z. \qquad (**)$$

Показатели степени x, y и z — числа, которые нам нужно определить. Как и в задаче, рассмотренной выше, выпишем размерности интересующих нас величин в какой-либо системе единиц, например, в системе СИ:

$$[\omega]=\text{с}^{-1},\ [F]=\text{Н}=\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-2},\ [M]=\text{кг},\ [l]=\text{м}.$$

Если формула (**) выражает реальную физическую закономерность, то размерности правой и левой частей этой формулы обязаны совпадать, то есть должно выполняться равенство

$$\text{с}^{-1}=\text{кг}^x\cdot\text{м}^x\cdot\text{с}^{-2x}\cdot\text{кг}^y\cdot\text{м}^z=\text{кг}^{x+y}\cdot\text{м}^{x+z}\cdot\text{с}^{-2x}.$$

В левую часть этого равенства вообще не входят метры и килограммы, а секунды входят в степени -1. Это означает, что должны удовлетворяться следующие уравнения для чисел x, y и z:

$$x+y=0,\ x+z=0,\ -2x=-1.$$

Решая эту систему, находим:

$$x=1/2,\ y=-1/2,\ z=-1/2.$$

Следовательно,

$$\omega \sim F^{1/2} M^{-1/2} l^{-1/2}.$$

Мы уже говорили раньше о том, что из-за незнания числового коэффициента знак равенства нам приходится заменять символом пропорциональности. Интересно отметить, однако, что точная формула для частоты отличается от найденной нами всего в $\sqrt{2}$ раз ($\omega^2=2F/Ml$). Другими словами, мы можем в данном случае считать, что оценку для ω мы получили не только качественную (в смысле характера зависимости от величин F, M и l), но и количественную. По порядку величины найденная степенная комбинация F, M и l дает правильное значение частоты. Нас и в дальнейшем будут интересовать оценки по порядку величины. В простых задачах довольно часто коэффициенты, неопределяемые методом размерностей, можно считать числами порядка единицы. Следует иметь в виду, конечно, что это не есть строгое правило. Окончательный вывод о значении числового коэффициента можно сделать только из каких-то дополнительных соображений. (Заметьте, кстати, что в примере, рассмотренном во «Введении», числовой коэффициент в формуле, определяющей скорость v как функцию силы, массы и длины пути, — также число порядка единицы.)

Само собой разумеется, решая задачу о колебаниях струны, мы могли бы с самого начала ввести вместо частоты ω однозначно связанный с ней период колебаний $T=2\pi/\omega$ и искать степенную зависимость именно периода T от натяжения струны F, массы M и размера l. Множитель 2π здесь вовсе «не портит» (но и не «улучшает»!) формулы, полученной из соображений размерностей, — ведь мы все равно не можем написать числовой коэффициент без точного решения уравнения колебаний.

Любопытно, что в другом, совсем простом и хорошо всем известном примере — о колебаниях математического маятника — для частоты колебаний уже из соображений размерности мы получили бы точную формулу $\omega^2=g/l$. Неопределяемый методом размерностей числовой коэффициент равен в этом случае единице. Если же мы с самого начала отыскивали бы связь периода колебаний математического маятника с его длиной l и ускорением свободного падения g, то мы пришли бы к формуле $T\sim\sqrt{l/g}$, которая отличается от точной на множитель 2π. Но и из этого примера вовсе не следует, что при использовании метода размерностей частота колебаний имеет какие-то преимущества перед периодом; происхождение множителя 2π связано лишь с определением $\omega=2\pi/T$.

Вернемся к рассмотренной задаче Рэлея и еще раз сформулируем предположения, которые позволили решить ее методом размерностей.

Во-первых, мы предположили, что действительно существует связь между величинами ω, F, M и l. Во-вторых, мы считали, что формула, выражающая эту связь, имеет степенной вид: $\omega\sim F^xM^yl^z$.

Метод размерностей помогает находить функциональные зависимости между разными физическими величинами, но только для тех ситуаций, когда эти зависимости степенные. К счастью, таких зависимостей в природе довольно много, и метод размерностей должен стать нашим хорошим помощником.

Правило $N-K=1$

Понятие размерности физической величины вводится тогда, когда уже выбраны некоторые основные физические величины и установлены единицы для их измерения. В механике традиционными основными величинами мы считаем массу, длину и время. В системе СИ эти величины измеряются соответственно в килограммах, метрах и секундах, в системе СГС — в граммах, сантиметрах и секундах.

Напомним, что основными единицами измерения в каждой системе (основными размерностями) называются единицы измерения (размерности) основных величин. Единицы измерения всех прочих, не основных величин выражаются через основные единицы измерения. Например, в системе СИ единица измерения силы «Ньютон» — это кг · м/с^2, единица измерения энергии «Джоуль» — кг · м^2/с^2; в системе СГС это соответственно «дина» — г · см/с^2 и «эрг» — г · см^2/с^2. Такие единицы называют производными.

Если мы рассматриваем задачи, в которых фигурируют немеханические величины (например, электрический заряд, температура и т. д.), можно увеличить число основных величин. В системе СИ в число основных величин включают силу тока (измеряют ее в «Амперах»), температуру (единица измерения — «Кельвин») и т. д.

В общем случае выбор основных величин и единиц для их измерения может производиться разными способами. Здесь многое зависит от удобства, традиций и существующих стандартов и соглашений. Для нас очень важно отметить, что пользоваться методом размерностей можно в любой системе единиц. Каждый раз, конечно, выражения для размерностей различных величин нужно писать в одной и той же заранее выбранной системе.

Представим себе, что в какой-то задаче нам надо отыскать функциональную зависимость между N величинами. Предполагая, что эта зависимость имеет степенной характер, мы можем пытаться решить задачу методом размерностей. *Если размерности всех N величин выражаются через размерности K основных величин и если при этом $N-K=1$, то существует единственная формула, задающая степенную зависимость между N величинами,* *и эта формула может быть найдена методом размерностей.*

Убедиться в этом нетрудно. Общий вид искомой формулы мы записываем так: в левой части стоит одна из величин в степени 1, а в правой части — произведение степеней остальных $N-1$ величин. Показатели степени пока неизвестны. Всего неизвестных показателей тоже $N-1$. Для определения этих показателей нам нужно $N-1$ уравнений. Каждое из уравнений мы получаем, сравнивая показатели степени, стоящие слева и справа при одной из основных размерностей. Если в нашей задаче встречается ровно $N-1$ основных размерностей, мы получим ровно столько уравнений, сколько нам требуется. Уравнения эти линейные, а существование и единственность решения системы таких уравнений гарантируют нам существование и единственность искомой степенной формулы. Это правило хорошо иллюстрируют разобранные выше примеры. Записывая формулы $v\sim F^x m^y s^z$ или $\omega\sim F^x M^y R^z$, мы каждый раз имели $N=4$ величины, число неизвестных показателей $N-1=3$ совпадало с числом основных размерностей $K=3$ (кг, м, с). Системы трех линейных уравнений для трех неизвестных имели единственные решения, окончательные формулы для v и ω также были единственно возможными. Таким образом, для четырех функционально связанных величин мы всегда можем построить только одну формулу, если число основных размерностей, встречающихся в задаче, равно трем.

Задача Рэлея о колебаниях сферической капельки

Пусть из круглого отверстия вытекает капля. Довольно естественно считать, что в равновесии капля должна иметь сферическую форму — поверхностная энергия при этом минимальна, а всякая система стремится попасть в состояние с минимальной энергией. Даже очень малые деформации капли приведут к тому, что силы поверхностного натяжения «заставят» ее пульсировать — форма капли будет периодически изменяться. Мы предполагаем, что колебания продолжаются достаточно долго и затухание их мало. Нас интересует вопрос о частоте (или периоде) процесса. Эта частота может зависеть, очевидно, от величины поверхностного натяжения жидкости σ, плотности жидкости ϱ и радиуса капли r*. Будем искать эту зависимость в виде

$$\omega\sim\sigma^x\varrho^y r^z.$$

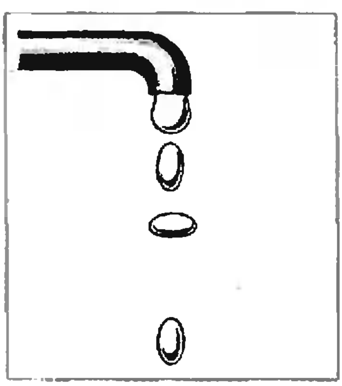


Рис. 2.

Выпишем размерности всех величин в системе СИ:

$$[\omega]=\text{с}^{-1},\ [\sigma]=\text{Н}\cdot\text{м}^{-1}=\text{кг}\cdot\text{м}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{м}^{-1}=\text{кг}\cdot\text{с}^{-2},$$

$$[\varrho]=\text{кг}\cdot\text{м}^{-3},\ [r]=\text{м}.$$

Число величин, связь между которыми мы отыскиваем, снова на единицу больше числа основных размерностей. Правило $N-K=1$ говорит нам, что формула для частоты должна получиться единственной. Уравнения для определения x, y и z получаются из соотношения:

$$\text{с}^{-1}=\text{кг}^x\cdot\text{с}^{-2x}\cdot\text{кг}^y\cdot\text{м}^{-3y}\cdot\text{м}^z=\text{кг}^{x+y}\cdot\text{с}^{-2x}\cdot\text{м}^{-3y+z}.$$

Для трех неизвестных чисел есть три уравнения:

$$-2x=-1,\ x+y=0,\ -3y+z=0.$$

Эта система имеет единственное решение

$$x=1/2,\ y=-1/2,\ z=-3/2.$$

Окончательно интересующая нас формула для частоты колебаний запишется так:

$$\omega\sim\sqrt{\frac{\sigma}{\varrho r^3}}.$$

Эта формула подсказывает и возможный способ экспериментального определения величины σ. Для этого нужно знать плотность жидкости ϱ, радиус капли r и определить на опыте частоту ω. То, что мы не знаем числового коэффициента в этой формуле, не должно быть серьезным препятствием. Мы можем определить его, например, проделав опыт с жидкостью, для которой вели-

*) Возможно, в этом месте у вас возник вопрос: почему не предположить, что частота может зависеть еще и от силы тяжести, действующей на каплю? Вопрос этот очень естественный, и мы обязательно обсудим его. Но немного позже.

чина поверхностного натяжения известна.

По существу мы сталкиваемся сейчас с простым случаем моделирования — колебания капли исследуемой жидкости можно промоделировать колебаниями капли жидкости с известными σ и ϱ. Можно говорить здесь и о подобии колебаний формы капли в двух разных жидкостях.

Можно проинтерпретировать формулу для частоты колебаний ω и по-другому. Перепишем ее так:

$$(\sigma/\varrho)\sim r^3\omega^2.$$

Считая σ и ϱ параметрами, характеризующими жидкость и потому одинаковыми для капель этой жидкости, имеющих разные размеры, мы приходим к заключению, что периоды $T_1=2\pi/\omega_1$ и $T_2=2\pi/\omega_2$ колебаний двух капель одной и той же жидкости и радиусы r_1 и r_2 этих капель связаны соотношением

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{r_1^3}{r_2^3}$$

— квадраты периодов колебаний двух капель относятся как кубы их размеров! Не напоминает ли это вам один из законов Кеплера? Аналогия, пожалуй, далекая, но в обоих случаях речь идет о периодических процессах!

Сделаем еще одно замечание. Уже при выписывании набора величин, связь между которыми мы хотим отыскать, нужно отдавать себе отчет в том, что существенно и что несущественно для конкретного физического явления. Если речь идет о динамике (например, о колебаниях), то в задаче должны появиться силовая и массовая характеристики. Роль первой из них в задаче о колебаниях капли играла величина σ, роль второй — плотность жидкости ϱ. По существу мы считали, что колебания определяются только поверхностным натяжением. Полученное нами решение, безусловно, годится, если капля колеблется в кабине космического корабля. А годится ли оно вблизи Земли? Не должны ли мы учесть еще и силу тяжести, действующую на каплю?

Будем рассуждать так. Сила тяжести $F_т\sim\varrho r^3 g$, а силы поверхностного натяжения $F_{п.н}\sim\sigma r$. Ясно, что при достаточно малых r силы поверхностного натяжения больше силы тяжести. Опуская числовые множители, запишем неравенство, выражающее условие, при котором можно пренебречь силой тяжести: $\sigma r\gg\varrho r^3 g$. Это неравенство эквивалентно такому: $r\ll(\sigma/\varrho g)^{1/2}$. Можно утверждать, что для достаточно малых капель сила тяжести не должна сказываться на колебаниях. Оцените сами, каковы максимальные размеры капель воды, при которых еще можно пользоваться полученной нами выше формулой для частоты колебаний.

С какой частотой колеблются атомные ядра?

Оказывается, что на поставленный вопрос можно получить ответ, используя формулу для частоты колебаний капли.

В капельной модели атомного ядра ядро рассматривается как капелька ядерного вещества — «жидкости», состоящей из протонов и нейтронов. Ядро-капельку удерживают от распада силы поверхностного натяжения.

Нуклоны (протоны и нейтроны) находятся внутри ядра в связанном состоянии. Это значит, что для того, чтобы «оттащить» их друг от друга, нужно затратить определенную энергию. В расчете на один нуклон эта энергия равна $\varepsilon\approx 13\cdot 10^{-13}$ Дж/нуклон. Радиус ядра $r\approx 10^{-14}$ м, масса протона $m_p\approx 1{,}7\cdot 10^{-27}$ кг. Попробуем использовать всю эту информацию для вычисления характерных частот, с которыми колеблются атомные ядра — капельки ядерного вещества*).

Для частоты колебаний капельки ядерного вещества можно было бы воспользоваться той же формулой, что и для колебаний капель обычной жидкости, если бы только мы научи-

*) Нас интересует сейчас только качественная зависимость частоты колебаний от параметров ядра и количественная оценка по порядку величины; поэтому мы можем не учитывать разницу масс протона и нейтрона и считать массу нуклона равной, например, массе протона.

лись вычислять поверхностное натяжение «ядерной жидкости». Полная поверхностная энергия в капельной модели должна быть по порядку величины такой же, как и энергия связи всех частиц, находящихся внутри капли. Если число нуклонов в ядре равно A (это число называют «массовым числом»), то полная энергия связи всех нуклонов равна $A\varepsilon$ и поверхностная энергия ядра-капельки по порядку величины тоже равна $A\varepsilon$. Поделив ее на площадь поверхности капли $S=4\pi r^2$, мы и получим оценку для поверхностного натяжения: $\sigma\sim A\varepsilon/4\pi r^2$. Масса ядра из A нуклонов порядка Am_p, объем ядра — $\frac{4}{3}\pi r^3$; следовательно, плотность «ядерной жидкости» по порядку величины равна $\varrho\sim 3Am_p/4\pi r^3$. Подставив полученные выражения для σ и ϱ в формулу $\omega\sim(\sigma/\varrho)^{1/2}r^{-3/2}$, мы придем к интересующему нас результату:

$$\omega\sim\frac{1}{\sqrt{3}\,r}\left(\frac{\varepsilon}{m_p}\right)^{1/2}\sim\frac{1}{r}\left(\frac{\varepsilon}{m_p}\right)^{1/2}.$$

Типичные «ядерные» частоты — порядка $10^{22}\,\text{с}^{-1}$. Проверьте, что написанная формула дает близкий результат, не определенный нами числовой коэффициент — порядка единицы.

Метры «вдоль» и «поперек»

Те задачи, которые мы рассматривали до сих пор, решались по существу, одинаково и однозначно. Не нужно думать, что так всегда и бывает. Существуют ситуации, когда правило $N-K=1$ не выполняется, и тогда приходится прибегать к новым идеям. Одна из таких идей заключается в том, что можно попытаться увеличить число основных величин, то есть по существу перейти к изучению задачи в системе с большим числом основных размерностей.

Чтобы проиллюстрировать такую идею, рассмотрим две простые задачи.

Первая — безусловно, всем хорошо известна. Представим себе, что со стола высоты H падает на пол шарик. Скорость шарика в момент отрыва от стола горизонтальна и равна v_0. Дальность его полета можно, конечно, связать с H и v_0. Мы предлагаем читателю проделать сейчас эти простые вычисления, прежде чем читать эту статью дальше. Проделали? А теперь подумайте — нельзя ли найти связь между H и v_0 с помощью метода размерностей? Давайте попытаемся. Пусть дальность полета равна x_0. Кроме H и v_0, для задачи существенной величиной является, несомненно, ускорение свободного падения g. От массы шарика ответ зависеть не должен — ведь это чисто кинематическая задача. Таким образом, у нас есть четыре величины — x_0, v_0, H и g. В выражения же для размерностей всех этих величин входят только метры и секунды, то есть $N=4$, $K=2$ и $N-K=2>1$! Если записать $x_0\sim v_0^{\alpha}H^{\beta}g^{\gamma}$, то для трех неизвестных чисел α, β, γ мы сможем написать только два уравнения. Как же быть?

Давайте введем отдельные единицы для измерения расстояний по вертикали и по горизонтали: расстояния вдоль вертикальной оси Y будем измерять в «вертикальных» метрах — $м_y$, а расстояния вдоль горизонтальной оси X — в «горизонтальных» метрах — $м_x$. Тогда размерности таковы:

$$[g]=м_y с^{-2},\ [v_0]=м_x с^{-1},\ [H]=м_y,\ [x_0]=м_x.$$

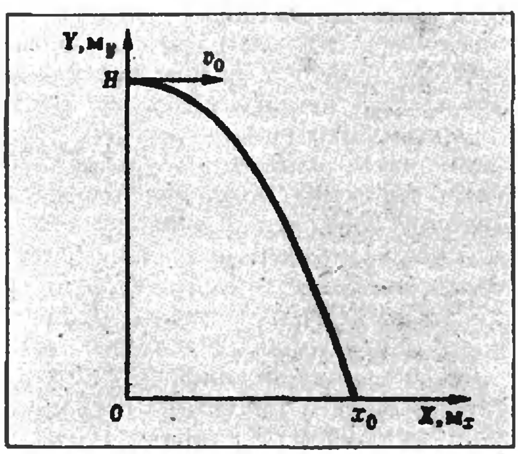


Рис. 3.

Теперь для $N=4$ уже $K=3$ — основными размерностями стали $м_x$, $м_y$ и с. Формула $x_0 \sim v_0^{\alpha} H^{\beta} g^{\gamma}$ приводит к соотношению

$$м_x = м_x^{\alpha} \cdot с^{-\alpha} \cdot м_y^{\beta} \cdot м_y^{\gamma} \cdot с^{-2\gamma} = м_x^{\alpha} \cdot с^{-\alpha-2\gamma} \cdot м_y^{\beta+\gamma}.$$

Система уравнений

$$\alpha=1,\ -\alpha-2\gamma=0,\ \beta+\gamma=0$$

имеет единственное решение

$$\alpha=1,\ \beta=1/2,\ \gamma=-1/2,$$

и мы получаем искомый ответ:

$$x_0 \sim v_0\sqrt{H/g}\,.$$

Сравните это решение с тем, которое получилось у вас при точном вычислении.

Вторая задача, иллюстрирующая ту же идею, относится к кинетической теории газов. Молекулы газа имеют конечные размеры и могут сталкиваться друг с другом даже в разреженном газе. Среднее расстояние, пролетаемое молекулами между двумя последовательными столкновениями, называется длиной свободного пробега. Нас интересует, как зависит длина свободного пробега l от размера молекул r и их концентрации n.

Выписываем размерности: $[n] = м^{-3}$, $[l] = м$, $[r] = м$. Ясно, что, пытаясь связать l, r и n, мы опять обнаружим, что правило $N-K=1$ не выполняется: $N=3$, а $K=1$ — в задаче есть только одна основная размерность — м.

В этом случае также удобно ввести «продольные» и «поперечные» длины. Будем условно считать молекулы шариками и следить за одним из таких шариков. Договоримся измерять расстояние вдоль траектории шарика-молекулы «продольными метрами» — $м_{\parallel}$. Ясно, что «помешать» движению избранной нами молекулы могут те молекулы, которые попадают в цилиндр, образующая которого параллельна траектории, а основанием служит сечение молекулы-шарика, перпендикулярное к траектории. Площадь этого сечения пропорциональна r^2. Естественно считать в такой ситуации, что r измеряется в «поперечных метрах» — $м_{\perp}$. Тогда объем измеряется в единицах $м_{\parallel} \cdot м_{\perp}^2$ и размерность n есть $м_{\parallel}^{-1} \cdot м_{\perp}^{-2}$. После этих рассуждений у нас появляются две основные размерности — $м_{\parallel}$ и $м_{\perp}$ — для трех величин l, r и n. Этого уже достаточно, чтобы получить однозначную формулу, их связывающую. Легко проверить, что эта формула такова:

$$l \sim 1/nr^2.$$

Задачи и рекомендации

Мы познакомились выше с основными элементами анализа задач с помощью метода размерностей. Еще раз подчеркнем, что формулы полученные из подобных рассуждений, обычно позволяют делать и количественные оценки. Здесь нужна, конечно, известная осторожность, и тем не менее, просто грех не пользоваться тем, что числовые коэффициенты в формулах часто оказываются порядка единицы.

Само собой разумеется, что оценки, построение простых моделей и использование аналогий — это всегда только первый этап исследования физических процессов. За этим этапом должно следовать более аккуратное и по возможности точное изучение обсуждаемых явлений. Мы вовсе не хотели бы, чтобы у вас сложилось впечатление о всесильности метода размерностей. Прежде чем использовать его в той или иной форме, нужно постараться яснее представить себе физический процесс, хорошо продумать интересующие нас характеристики. Только при этом условии можно надеяться на успех.

Ниже мы предлагаем вам для самостоятельных раздумий задачи.

Задачи

1. Найдите формулу, описывающую связь между массой планеты M, ее радиусом R и минимальным периодом вращения планеты вокруг своей оси. Учтите, что само существование столь грандиозных «шариков», которыми являются планеты, обусловлено гравитационным взаимодействием частиц, из которых такие «шарики» состоят. Каков минимальный период вращения для планеты с массой и радиусом такими же, как у Земли? Нужно получить оценку по порядку величины.

2. Линейные размеры двух геометрически подобных стальных камертонов отличаются в три раза. Как отличаются частоты этих камертонов?

3. Найдите зависимость периода пульсаций газового пузыря, образовавшегося при глубинном подводном точечном взрыве, если известно, что при взрыве выделилась энергия E, а давление воды равно p. Попробуйте оценить также максимальный размер газового пузыря. Как зависит период пульсаций от глубины H?

4. Оцените давление в центре звезды с массой M и радиусом R. Вычислите соответствующие числовые значения для Солнца ($M_C = 2 \cdot 10^{30}$ кг, $R_C = 7 \cdot 10^5$ км), для белого карлика ($R_к = 10^3$ км), для нейтронной звезды ($R_н = 20$ км). Массы белого карлика и нейтронной звезды порядка массы Солнца.

5. Сравните поверхностные натяжения ядерной жидкости и воды.

И еще мы хотим указать вам несколько книг и статей, в которых можно найти много примеров использования метода размерностей при анализе вопросов из разных областей физики. (Ссылки расположены в порядке возрастающей сложности.)

1. Б. Ю. Коган. «Размерность физической величины» (Библиотечка физико-математической школы) (М., «Наука», 1968).
2. А. С. Компанеец. «Размерность физических величин и подобие явлений» («Квант», 1975, № 1).
3. Н. Д. Кришталь. «Метод размерностей». («Квант», 1975, № 1).
4. Ю. М. Брук, А. Л. Стасенко. «Как физики делают оценки — метод размерностей и порядки физических величин» (в сб. «О современной физике — учителю»). (М., «Знание», 1975).
5. Г. Хантли. «Метод размерностей» (перевод с англ.) (М., «Мир», 1970).
6. Л. И. Седов. «Теория размерности и физическое подобие» (в кн. Л. И. Седова «Размышления о науке и об ученых») (М., «Наука», 1980).

Новости науки

Распадается ли протон?

Казалось бы, сам факт нашего существования свидетельствует о том, что протон — стабильная частица и его распад принципиально невозможен. Много лет физики так и думали.

Все хорошо знали, что свободный нейтрон распадается, превращаясь в протон, электрон и антинейтрино:

$$n \to p + e^- + \tilde{\nu}.$$

Этот распад оправдан тем, что нейтрон немного тяжелее протона (примерно на 0,138% его массы).

Распаду нейтрона отвечает среднее время жизни $\tau \approx 900$ с. Это значит, что, если наблюдать за большим количеством свободных нейтронов, в одну секунду будет распадаться 1/900 часть от их полного числа N:

$$\Delta N = -\frac{1}{900} N.$$

Со временем число свободных нейтронов будет убывать по экспоненциальному закону

$$N = N_0 e^{-\frac{t}{900}},$$

где N_0 — число нейтронов в некоторый момент времени, принятый за начальный ($t = 0$).

Процесс распада нейтрона обладает важной особенностью: и нейтрон, и протон — это нуклоны, тяжелые частицы, из которых построены атомные ядра. При распаде нейтрона число нуклонов остается одним и тем же: один нуклон — нейтрон — превращается в один нуклон — протон.

Такой закон сохранения числа нуклонов — один из самых фундаментальных законов природы. Но всегда ли он верен? Не может ли протон распасться и превратиться, например, в положительный мю-мезон и нейтрино:

$$p \to \mu^+ + \nu$$

или еще во что-нибудь?

Ясно, что, если такой распад и возможен, он должен быть очень редким. А среднее время жизни протона должно быть, соответственно, очень большим. Во всяком случае, значительно больше времени существования нашей Вселенной, что составляет, по современным представлениям, приблизительно 15—20 миллиардов лет, то есть порядка 10^{18} секунд.

Во многих лабораториях мира ученые безуспешно пытались обнаружить распад протона. Поиски велись в течение почти 10 лет ($\sim 10^8$с) на больших массах вещества. В принципе при таких условиях можно зарегистрировать очень редкие события. Проведенные опыты позволяют утверждать, что, если протон и распадается, то его среднее время жизни

$$\tau > 3 \cdot 10^{30} \text{ лет.}$$

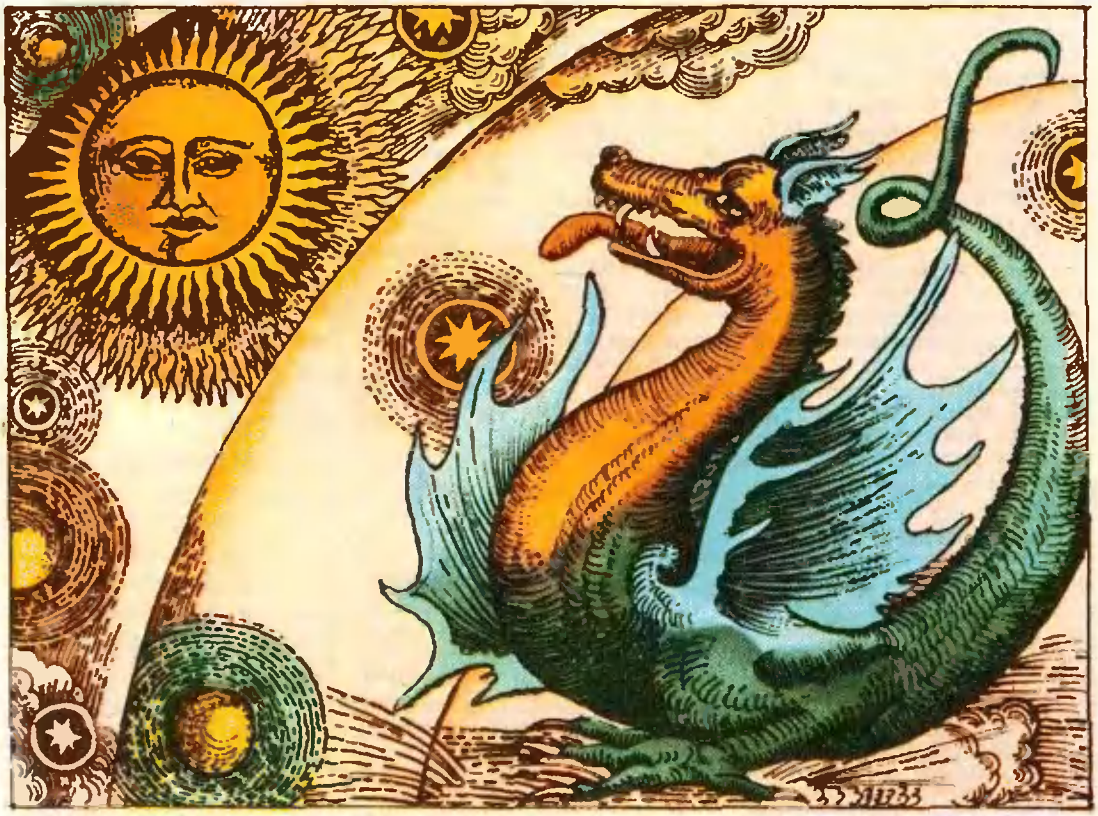
(Это при условии, что распад происходит с образованием мю-мезона. Для других возможных вариантов распада чувствительность опытов была несколько меньшей и они приводили к выводу, что $\tau > 10^{30}$ лет.)

Представляет ли интерес дальнейшее уточнение опытов? Ведь вероятность распада протона так мала!

Оказывается, выяснить, насколько точен закон сохранения числа нуклонов, очень важно для современной теории. Сейчас физики думают, что на ранних этапах развития Вселенной вероятность распада протона была большой — просто эта вероятность уменьшается со временем, или — точнее — уменьшается с уменьшением плотности вещества.

Разные варианты теории, пока еще очень гипотетические, указывают на то, что среднее время жизни протона должно быть примерно около 10^{31} — 10^{32} лет. Это на 1—2 порядка больше, чем можно было заметить в уже проведенных опытах. Если физикам повезет и оценка (очень грубая) возможной величины среднего времени жизни протона окажется верной, то в ближайшие несколько лет распад может быть зарегистрирован. Если же это время еще больше, то задача становится очень и очень трудной.

Я. С.



А. Михайлов

О солнечных затмениях вообще и конкретно о затмении 31 июля 1981 года

Утром 31 июля 1981 года произойдет интересное астрономическое явление — солнечное затмение, видимое как частное на всей территории Советского Союза и как полное на узкой, но длинной полосе, идущей от берегов Черного моря через Кавказ, Казахстан, Сибирь, Дальний Восток и Охотское море к просторам Тихого океана. Но прежде чем описать это затмение, поясним некоторые общие вопросы солнечных затмений.

Эти явления вызываются Луной, когда она частично или полностью закрывает солнечный диск. Луна по своему диаметру почти в 400 раз меньше Солнца, но примерно во столько же раз она ближе к Земле, вследствие чего видимые размеры Солнца и Луны для земного наблюдателя практически одинаковы. Однако небольшое отклонение земной орбиты от круговой вызывает небольшие изменения в расстояниях до Солнца, а вместе с тем и в угловом диаметре Солнца. То же происходит и с Луной при ее движении вокруг Земли. Поэтому лунный диск бывает виден нам временами немного больше солнечного, а временами немного меньше. В первом случае Луна может полностью закрыть все Солнце и произвести полное солнечное затмение, а во втором случае — оставить видимыми края Солнца в виде узкого кольца, окружающего темный диск Луны, и произвести кольцеобразное затмение. Ежегодно в зимнее время, когда Земля бывает ближе к Солнцу и поэтому Солнце видно нам под наибольшим углом, происходят преимущественно кольцеобразные затмения, а в летнее время, когда Земля дальше от Солнца, преобладают полные затмения.

Во время солнечных затмений Луна повернута к Земле своей неосве-

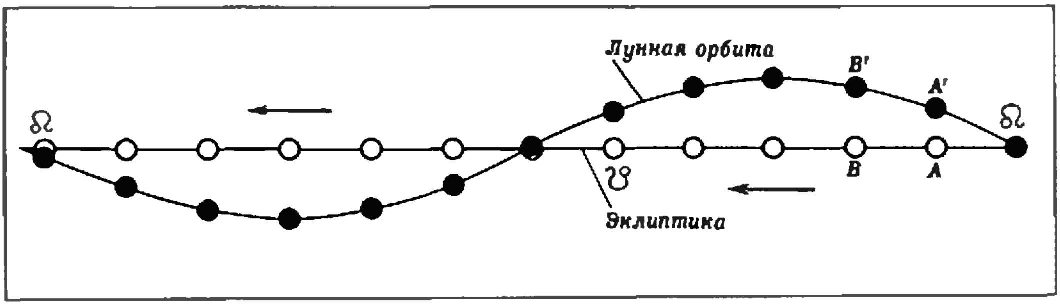


Рис. 1.

щенной стороной и находится в новолунии. В течение полного года бывает 12 или 13 новолуний, но далеко не каждое сопровождается затмением, так как плоскость лунной орбиты не совпадает с плоскостью эклиптики, по которой совершается видимое годичное движение Солнца, а наклонена к ней под углом 5°8′. Если развернуть линии эклиптики и лунной орбиты на плоскость, получится картина, представленная на рисунке 1. Здесь AA', BB' и т. д. изображают ряд новолуний, в большинстве которых Луна проходит выше (севернее) или ниже (южнее) Солнца, не производя затмений. Лишь новолуния, происходящие близ точек пересечения лунной орбиты с эклиптикой, называемых узлами, сопровождаются солнечными затмениями. Узлы изображаются специальными значками: ☊ — восходящий узел, в котором Луна переходит из южного эклиптического полушария в северное, и ☋ — нисходящий узел, в котором Луна переходит из северного полушария в южное. Эти значки представляют схематические изображения дракона: по древнекитайскому поверью он караулит близ узлов Солнце, чтобы его проглотить.

Оценим, какова протяженность области вокруг узла, в которой Луна может закрыть хотя бы край Солнца. Для воображаемого наблюдателя, находящегося в центре Земли, предельное новолуние с затмением изображено на рисунке 2, где диски Солнца и Луны соприкасаются. Полагая их кругами с радиусами 16′ (все расстояния будем измерять в угловых единицах), получим равнобедренный треугольник Л☊С с основанием $|ЛС|=32'$ и углом $i=5°8'$.

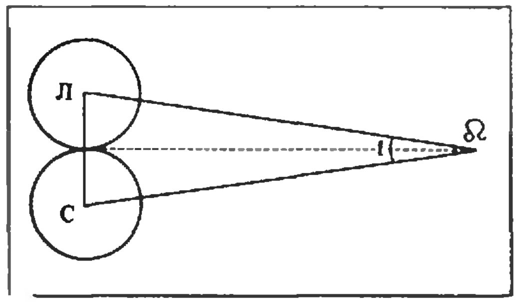


Рис. 2.

Из этого треугольника (считая его плоским) найдем искомое предельное расстояние R Луны от узла:

$$R=\frac{|ЛС|}{2\sin i/2}=357'\approx 6°.$$

Однако наблюдатель, находящийся на поверхности Земли, видит Луну смещенной на величину ее параллакса, который может достигать 61′. На столько же нужно увеличить сторону ЛС: $|ЛС|=32'+61'=93'$. Повторив вычисление с этим значением, получим $R=994'$ или приблизительно 16,6°, так что вся зона затмений (в обе стороны от узла) охватывает 33°.

При этой оценке мы пользовались средними значениями радиусов Солнца и Луны. Если скомбинировать их крайние значения и учесть, что наш треугольник — не плоский, а сферический, то получилось бы для минимума области затмений 31,8° и для максимума — 35,8°. Таковы размеры обиталища дракона, поджидающего Солнце, чтобы, если и не проглотить его целиком, то хотя бы откусить кусочек, вызвав частное затмение малой фазы.

Посмотрим, может ли Солнце в своем видимом годичном движении по эклиптике проскочить эту область, не пав жертвой дракона. За сутки Солнце проходит в среднем 57′, а зимой, при наиболее быстром движении, — 61′. Между двумя новолуниями бывает 29,53 суток; за это время, при наибольшей скорости, Солнце пройдет 30°, то есть меньше, чем минимальная область затмений. Следовательно, оно не успеет беспрепятственно пройти область затмений между двумя новолуниями, и по крайней мере одно из них застигнет Солнце внутри этой зоны. Если это случится близко от узла, затмение будет большой фазы, даже полное или кольцеобразное. Если же первое новолуние произойдет в самом начале вхождения Солнца в зону затмений, то следующее новолуние случится еще до выхода Солнца из опасной зоны, так что два новолуния подряд будут сопровождаться затмениями, но частными и очень малой фазы (которые для широкой публики могут остаться незамеченными). После этого почти через полгода повторятся такие же явления вблизи другого узла.

Таким образом, ежегодно бывают две эпохи, когда происходят солнечные затмения. В каждую эпоху бывают либо одно затмение большой фазы, либо два малой фазы, а в течение года могут быть два затмения большой фазы или четыре малой. Конечно, возможны и промежуточные случаи — одно затмение большой фазы и два малой или два большой и одно малой. Но если первое затмение случится в начале января, то еще до истечения года (в конце декабря) Солнце вступит опять в опасную зону и может произойти еще одно затмение малой фазы. (Этому способствует и то обстоятельство, что лунные узлы не остаются неподвижными на эклиптике, а движутся навстречу Солнцу, так что время между прохождениями Солнца через данный узел на 19 дней короче календарного года.) В этом случае в течение одного года возможны пять затмений. Таким был, например, 1935 год, когда частные затмения наблюдались 5 января, 3 февраля, 30 июня, 30 июля и 25 декабря.

Если говорить о Земле вообще, то солнечные затмения — совсем не редкие явления. В течение ста лет в среднем бывает 84 частных, 77 кольцеобразных, 11 кольцеобразно-полных и 66 полных, а всего — 238 затмений. Однако каждое частное затмение видимо не на всей Земле, а на ограниченной, хотя и большой, ее части. Лунная полутень (рис. 3) обычно имеет радиус около 3500 км и скользит по Земле в сторону движения Луны — в восточном направлении. В центре полутени находится пятно тени, радиус которого может достигать 135 км. Но может быть и так, что вершина конуса тени не достигает Земли, тогда на ее поверхность падает расширяющаяся полость конуса, производящая кольцеобразное затмение. В случае полного затмения пятно тени уносится Луной со скоростью порядка одного километра в секунду, так что наибольшая продолжительность полного затмения в данном месте не превышает 7 минут.

Можно ли заранее предсказывать затмения? Оказывается, день предстоящего затмения умели предсказывать еще в глубокой древности, когда были уточнены период чередо-

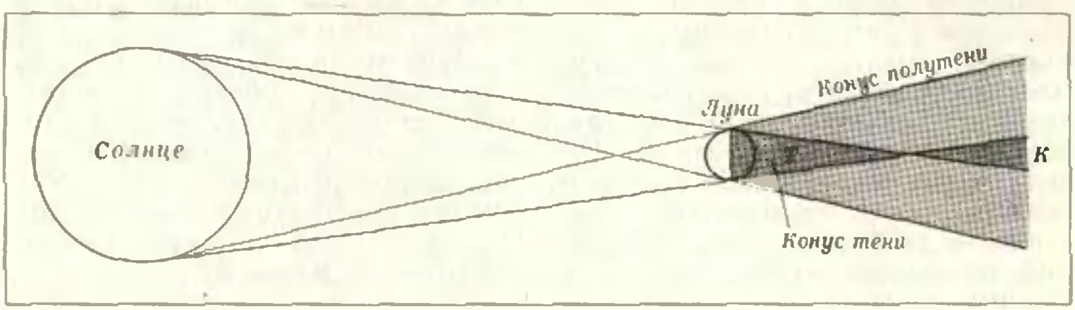


Рис. 3. *T* — **область полного затмения;** *K* — **область кольцеобразного затмения.**

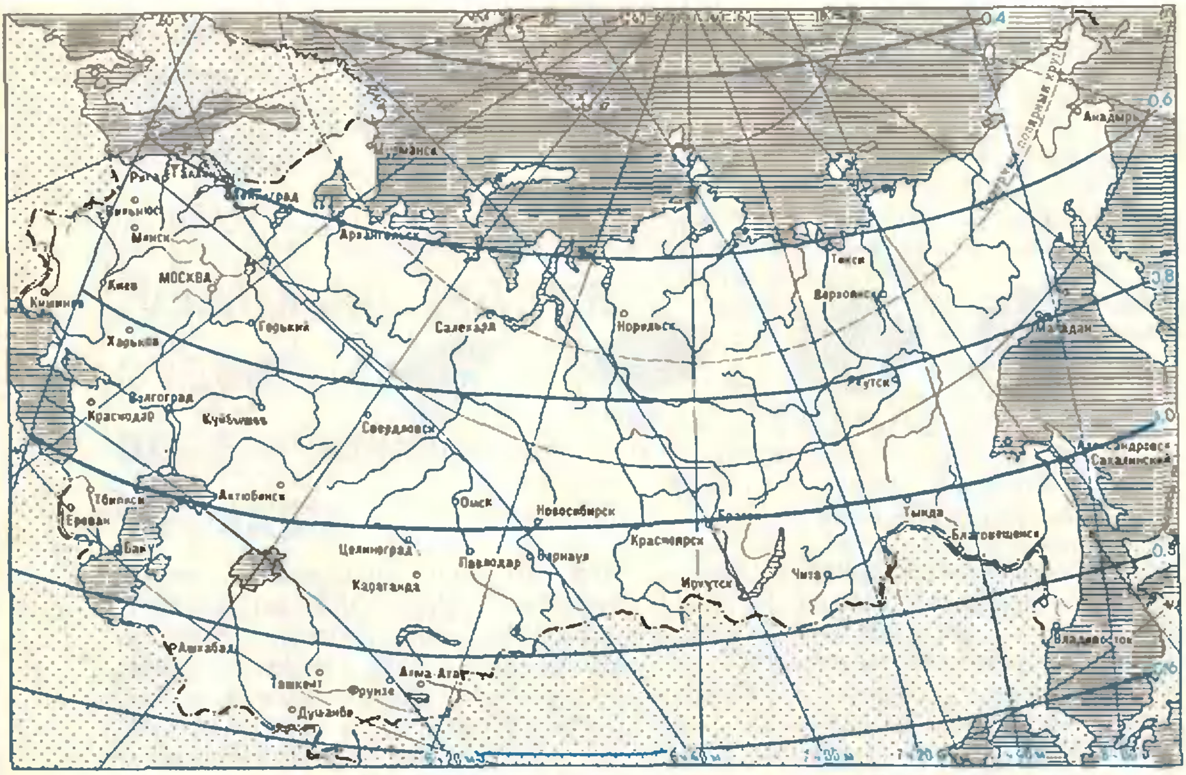


Рис. 4.

вания фаз Луны и положение лунной орбиты относительно эклиптики. Новолуния чередуются через так называемый синодический месяц, равный 29,5306 суток, а возвращение Луны к данному узлу происходит через 27,2122 суток — промежуток времени, называемый драконическим месяцем. Эти числа почти соизмеримы:

242 драк. мес.	= 6585, 357	суток,
223 син. мес.	= 6585, 321	—»— ,
разность	= 0,036	—»— .

Этот период, округленно равный 6585 1/3 суток, или 18 лет и 10 1/3 или 11 1/3 дней, в зависимости от числа високосных лет в этом периоде, называется саросом. По свидетельству Геродота он был известен еще в шестом веке до н. э. В течение одного сароса происходят 15 частных, 14 кольцеобразных, 2 кольцеобразно-полных и 12 полных, а всего — 43 солнечных затмения, которые по истечении сароса чередуются в прежнем порядке. Однако дробное число суток в саросе приводит к тому, что по окончании сароса Земля оказывается дополнительно повернутой на 1/3 оборота, так что затмения каждый раз сдвигаются на 120° к западу. Поэтому с помощью сароса можно предсказать лишь день и общий характер будущего затмения, но без подробного указания мест его видимости.

Теперь же затмения предсказываются на многие годы вперед с точностью до нескольких секунд во времени и до двух километров по месту его видимости, что является результатом огромной и длительной работы по изучению движения Солнца и Луны по звездному небу.

1981 год отмечен двумя затмениями — кольцеобразным, которое наблюдалось 5 февраля в южной части Тихого океана, и интересующим нас полным, которое произойдет 31 июля. Оно начнется на Кавказе, когда полоса полного затмения шириной в 65 км вступит на черноморское побережье близ Очамчира и отсюда пройдет в северо-восточном направлении через Нальчик и Моздок, пересечет северную часть Каспийского моря, затронет Актюбинскую область (станция Берчогур на Ташкентской железной дороге).

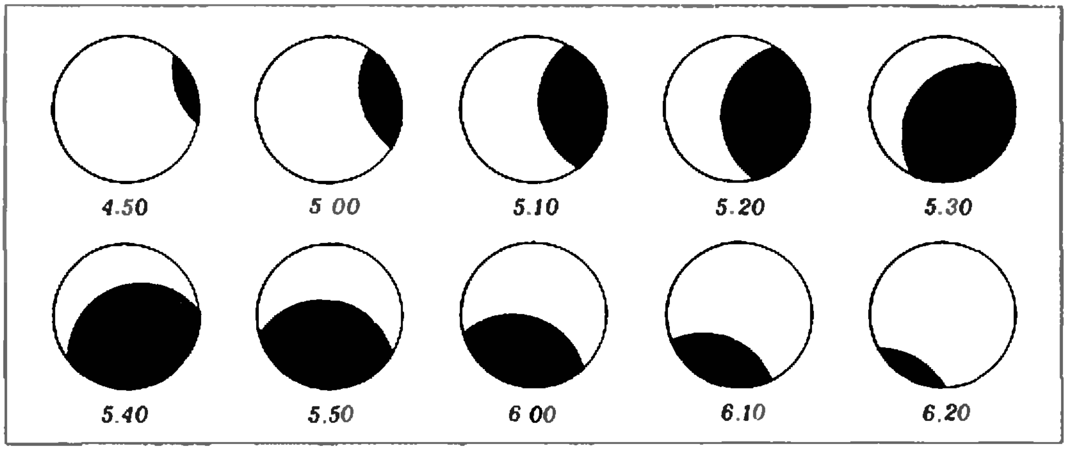


Рис. 5. Течение затмения в Москве.

пройдет немного севернее Целинограда и Павлодара, между Новосибирском и Барнаулом, через Ленинск-Кузнецкий, южнее Красноярска, через Тайшет, Братск, Северо-Байкальск и Тынду, где продолжительность полной фазы достигнет 120 секунд, а ширина полосы полного затмения — 110 км при высоте Солнца над горизонтом 53°. Северную часть Татарского пролива полоса пересечет у Де-Кастри и пройдет через Александровск-Сахалинский и Охотское море, охватит еще один из небольших островов Курильской гряды и, не затрагивая больше суши, закончится далеко в Тихом океане. В пределах СССР весь путь длиной около 7400 км лунная тень пробежит за 101 минуту.

Для наблюдения полного затмения многочисленные советские и иностранные экспедиции направляются в полосу полной фазы — преимущественно в Сибирь и на Дальний Восток, где затмение будет наиболее продолжительным и хорошая погода вполне вероятна. Пожелаем же им успеха.

На маленькой карте (рис. 4) жирной линией изображена полоса полного затмения, а параллельные ей линии, оцифрованные 0,8, 0,6 и 0,4 (называемые изофазами), указывают места, в которых наибольшая фаза частного затмения имеет соответствующую величину. Косые линии, называемые изохронами, дают московское декретное время наступления наибольшей фазы. Так, например, Москва находится между изофазами 0,6 и 0,8, но ближе к последней, так что величину наибольшей фазы можно оценить в 0,72. По изохронам можно определить времы наступления этой фазы — 5 ч 35 мин. Точное вычисление для Москвы дает по летнему декретному времени:

восход Солнца	5 ч 32 мин,
начало частного затмения	5 ч 43,0 мин,
наибольшая фаза затмения	6 ч 34,7мин,
конец частного затмения	7 ч 29,4 мин.

На рисунке 5 изображен вид Солнца в Москве в течение всего затмения через каждые 10 мин.

В заключение напомним, что во время частного затмения, во избежание серьезного повреждения зрения, нельзя смотреть на Солнце без защитного темного стекла, так как незакрытая часть солнечного диска имеет такую же яркость, как и вне затмения. Лишь при наступлении полной фазы затмения можно любоваться красивым зрелищем хромосферы и короны невооруженным глазом или в бинокль.

П. Канаев

Несколько опытов с пустотелым прозрачным шариком

В магазинах спортивных товаров продается нехитрый предмет для рыболовов — «груз плавучий». Это пустотелый пластмассовый шарик с двумя ушками и небольшим слегка вытянутым отверстием (рис. 1). С ним можно провести ряд интересных физических опытов.

Прежде чем приступить непосредственно к опытам, научитесь быстро наполнять шарик водой (или какой-нибудь другой жидкостью). В этом вам может помочь шприц без иглы или резиновая груша, в отверстие которой вставлена пустая трубочка от шариковой авторучки.

1. Несколько кристалликов марганцовки (марганцовокислого калия) растворите в небольшом количестве горячей воды до получения раствора темно-малинового цвета. Этим раствором наполните шарик и на нитке опустите его отверстием вверх в стеклянный сосуд с водой комнатной температуры. (Для устойчивости шарика к нижнему его ушку привяжите небольшой груз.)

Сразу же из отверстия начнет подниматься окрашенная струя диаметром, равным диаметру отверстия (рис. 2). Струя доходит до «потолка» (до поверхностного слоя), откуда отдельными потоками стекает вниз. Процесс этот продолжается довольно долго.

Несколько видоизмените опыт. Приготовьте раствор марганцовки комнатной температуры и погрузите шарик в воду той же температуры — окрашенной струи из отверстия не возникает.

Теперь добавьте в раствор несколько капель этилового спирта и повторите опыт — окрашенная струя устремляется вверх и существует длительное время.

Почему возникает окрашенная струя в первом и последнем случаях и не возникает во втором случае?

Причиной всему — движение молекул. В первом опыте скорость движения молекул горячего раствора больше скорости движения молекул холодной воды в сосуде — теплая струя поднимается вверх. Во втором опыте температуры раствора и воды одинаковы — одинаковы и скорости движения молекул. В третьем опыте температуры тоже одинаковы, но движение молекул спирта более интенсивное, благодаря чему и вытесняется раствор из отверстия.

2. Наполните шарик водой до краев отверстия. Затем с помощью пипетки удалите часть воды (приблизительно три полные пипетки) и влейте такое же количество этилового спирта. После этого закройте отверстие пластилином.

Примерно через 20 минут в верхней части шарика появится воздушный пузырек величиной с горошину.

Если этиловый спирт заменить раствором борной или уксусной ки-

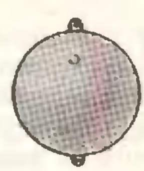


Рис. 1.

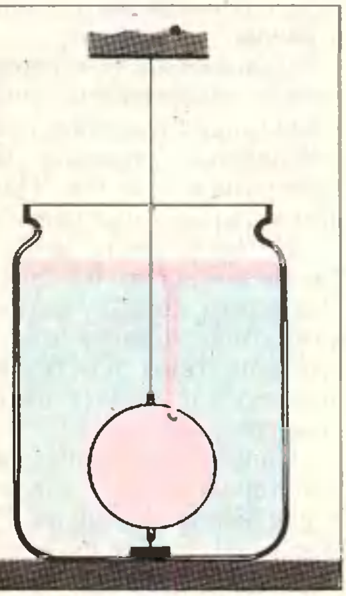


Рис. 2.

слоты, результат будет таким же. Если же воду смешать с глицерином, пузырька не возникнет.

Как это можно объяснить?

Молекулярно-кинетическая теория учит, что между молекулами есть промежутки. При смешивании воды со спиртом объем смеси оказывается меньше суммы объемов воды и спирта в отдельности; в результате появляется пузырек. То же наблюдается в смеси воды с борной или уксусной кислотой, а в смеси с глицерином сжатия не происходит (очевидно, в этом случае промежутки между молекулами не заполняются).

3. Возьмите шарик и краями его отверстия коснитесь поверхности воды. Отверстие затянется пленкой, но секунд через 30—40 пленка лопнет (при этом вы услышите легкий щелчок), а внутри шарика у края отверстия образуется капля воды.

Еще раз затяните отверстие шарика пленкой, но теперь пленку в середине проткните иглой. Пленка очень долго остается целой.

Почему пленка так недолговечна в первом случае и долговечна во втором?

Дело в том, что образующаяся на отверстии водяная пленка толще по краям, чем в середине (благодаря смачиванию). Поэтому, если плоскость пленки не строго горизонтальна (что весьма вероятно), вода будет смещаться по уклону, а пленка будет утончаться. В некоторый момент пленка лопнет, а вода соберется в каплю.

Долговечность пленки во втором случае объясняется тем, что игла хорошо смачивается водой и вода стягивается с краев к месту соприкосновения с иглой. Пленка становится толще и прочнее.

4. Приготовьте две стеклянные банки емкостью 0,5 литра каждая. Обе банки доверху наполните водой комнатной температуры. В одну из них капните из пипетки немного разведенного в воде (в отношении 1:4) шампуня.

Наполните шарик чистой водой и осторожно опустите его в банку с раствором шампуня. Тотчас же шарик опустится на дно.

Вымойте под краном поверхность шарика и так же осторожно опустите его в банку с чистой водой. Почти полностью погрузившись в воду, шарик не тонет, хотя сила тяжести несколько превышает выталкивающую силу.

Почему шарик с водой в одном случае тонет, а в другом — нет? Будет ли шарик тонуть в слабом растворе сахара в воде?

Оказывается, все зависит от поверхностного натяжения жидкости и от того, смачивает или нет эта жидкость поверхность шарика. Так, коэффициент поверхностного натяжения у чистой воды почти в два раза больше, чем у мыльного раствора, и пластмасса плохо смачивается водой. Вот почему шарик в воде не тонет.

Сахар еще увеличивает поверхностное натяжение воды, так что в слабом растворе сахара шарик тоже не утонет.

5. Возьмите проволоку диаметром 2—3 миллиметра и длиной около метра. Один конец проволоки опилите напильником и, согнув его под прямым углом, воткните в ближайшее к отверстию ушко шарика. Теперь шарик медленно опускайте в бак или ведро с водой и так же медленно поднимайте его на поверхность. Вы увидите, что при поднятии шарика из его отверстия будут вылетать воздушные пузырьки. Чем глубже погружается шарик, тем больше вылетает пузырьков.

Как объяснить образование и отрыв пузырьков воздуха при подъеме шарика?

Когда шарик опускается, воздух внутри него сжимается и в шарик входит некоторое количество воды. При подъеме внешнее давление уменьшается, воздух в шарике расширяется и на краях отверстия образуется пузырек. Размеры пузырька постепенно увеличиваются, а около отверстия образуется шейка, которая сужается. При этом выталкивающая сила, направленная вверх, увеличивается, а сила поверхностного натяжения, удерживающая пузырек, уменьшается. В некоторый момент эти силы уравниваются, пузырек отрывается и принимает шарообразную форму.

Н. Васильев, Т. Маликов

Рассмотрим разность

Трудно найти сборник олимпиадных или алгебраических задач, где не встречались бы задачи такого типа: *доказать, что при любом натуральном* n

а) $7^{2n}-5^{2n}$ *делится на* 24;

б) n^3-n *делится на* 6;

в) $\frac{n^5-5n^3+4n}{120}$ — *целое число;*

г) $3^{2n+3}+40n-27$ *делится на* 64;

д) $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ *делится на* 27;

е) $5^n(5^n+1)-6^n(3^n+2^n)$ *делится на* 91;

ж) $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ — *целое число.*

Попробуйте порешать эти задачи. Вероятно, у вас возникнут разные соображения вроде следующих: в задаче

а) воспользоваться тем, что $7^2-5^2=24$, и тождеством

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1}), \qquad (1)$$

показывающим, что a^n-b^n всегда делится на $a-b$;

б) выделить три случая: $n=3k$, $n=3k+1$ и $n=3k+2$, соответствующие разным остаткам при делении n на 3;

в) разложить многочлен в числителе на пять множителей $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ и заметить, что из пяти последовательных чисел найдется одно, делящееся на 3, одно — на 5, одно — на 4 и еще одно, делящееся на 2 (и не делящееся на 4);

е) представить разность как $(25^n-18^n)-(12^n-5^n)$ и как $(25^n-12^n)-(18^n-5^n)$, чтобы доказать ее делимость на 7 и на 13;

ж) доказать отдельно делимость $5n^3+7n$ на 3 и делимость $3n^5+7n$ на 5.

Не умаляя красоты и полезности этих и других подобных рассуждений, мы хотим разобрать один общий рецепт для всех таких задач. Мы увидим, что справедливость каждого из утверждений а) — ж) достаточно проверить лишь для небольшого числа первых значений n (в задаче а) — для двух, г) — для трех и т. п.), чтобы быть уверенным в их справедливости при всех n. А читатель, который разберется в заметке достаточно основательно, сможет сам составлять новые задачи в неограниченном количестве (причем даже такие, где встречаются иррациональные числа):

з) *число* $45^n+(-44)^n-1$ *делится на* 1980;

и) *число* $[(6+\sqrt{31})^n]-2^n+1$ *делится на* 10; *вообще, если* m, a, b — *натуральные числа и* $b<2a$, *то число* $[(am+1+\sqrt{a^2m^2+bm+1})^n]-2^n+1$ *делится на* $2m$ (здесь $[x]$ — целая часть числа x) *).

Сумма разностей

Прежде чем формулировать общие теоремы, продемонстрируем ход наших рассуждений на примере д). Эта задача, а также следующие ниже следствие из теоремы 2 и лемма 1 составляют содержание задачи **М629** из Задачника «Кванта».

Рассмотрим разность значений данной функции

$$f(n)=2^{2n-1}-9n^2+21n-14$$

в точках $n+1$ и n:

$$g(n)=f(n+1)-f(n)=3\cdot 2^{2n-1}-18n+12.$$

Мы хотим доказать, что $f(n)$ делится на 27 при всех $n=1, 2, \ldots$

*) Эти две задачи прислали в прошлом году наши читатели *В. Чичин* из с. Вознесенское Хабаровского края и *Вальтер Яноус* из Инсбрука (Австрия).

Поскольку $f(n)$ можно представить как сумму разностей

$$f(n)=(f(n)-f(n-1))+(f(n-1)-f(n-2))+\ldots+(f(2)-f(1))+f(1)=g(n-1)+g(n-2)+\ldots+g(1)+f(1)$$

и число $f(1)=0$ делится на 27, нам достаточно доказать, что $g(n)$ делится на 27 при всех n.

Поступим так же с $g(n)$: рассмотрим разность

$$h(n)=g(n+1)-g(n)=9\cdot 2^{2n-1}-18$$

и представим $g(n)$ как сумму $h(n-1)+h(n-2)+\ldots+h(1)+g(1)$. Поскольку $g(1)=0$, достаточно доказать, что $h(n)$ делится на 27 при всех n. Но это уже нетрудно: ведь $h(1)=0$, а при $n\geqslant 2$ число $h(n)=2\cdot 9(4^{n-1}-1)$ делится на $2\cdot 9(4-1)$ согласно (1). Тем самым задача д) решена.

Нам помог здесь тот факт, что для многочлена $\varphi(x)$ степени s разность $\Delta\varphi(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x)$ — многочлен на единицу меньшей степени $s-1$, «вторая разность» $\Delta(\Delta\varphi(x))=\Delta^2\varphi(x)$ — многочлен степени $s-2$ и т. д., так что s-я разность $\Delta^s\varphi(x)$ — просто число (многочлен степени 0). Отметим также полезную формулу для суммы разностей, которую мы применили дважды:

$$\varphi(n)=\sum_{1\leqslant j\leqslant n-1}\Delta\varphi(j)+\varphi(1). \qquad (2)$$

Многочлен плюс геометрическая прогрессия

Сформулируем теперь две общие теоремы, которые можно доказать тем же приемом («рассмотрим разность»).

Теорема 1. *Если число $b_0+b_1n+\ldots+b_{k-1}n^{k-1}$ — целое при $n=1$, $n=2,\ldots$, $n=k$, то оно целое при всех натуральных n.* (Здесь b_i — не обязательно целые!)

Теорема 2. *Если число q — целое и*

$$f(n)=cq^n+b_0+b_1n+\ldots+b_{k-1}n^{k-1}$$

— целое при $n=1$, $n=2$, ..., $n=k+1$, то $f(n)$ — целое при всех натуральных n.

Следствие. *Если число q — целое и число $f(n)$ делится на m при $n=1$, $n=2$, ..., $n=k+1$, то $f(n)$ делится на m при всех натуральных n.*

(Конечно, аналогичное следствие можно сформулировать и для многочлена из теоремы 1.)

Чтобы вывести следствие, достаточно применить теорему 2 к выражению $\bar f(n)=f(n)/m$, у которого все коэффициенты поделены на m: условие «*$f(n)$ делится на m*» эквивалентно тому, что

$$\bar f(n)=\frac{c}{m}q^n+\frac{b_0}{m}+\frac{b_1}{m}n+\ldots+\frac{b_{k-1}}{n}n^{k-1}$$

— целое число.

Например, для функции $f(n)$ из примера д) и $m=27$ можно применять теорему 2 к выражению $\bar f(n)=f(n)/27=$

$$=\frac{1}{54}4^n-\frac{1}{3}n^2+\frac{7}{9}n-\frac{14}{27}.$$

Легко проверить, что $\bar f(1)=\bar f(2)=\bar f(3)=0$, $\bar f(4)=2$ и по теореме 2 число $\bar f(n)$ — целое (то есть $f(n)$ делится на 27) при любом натуральном n.

Теперь перейдем к доказательству теоремы 2 (доказательство теоремы 1 мы оставляем читателям в качестве упражнения).

Пусть сначала $k=1$.

Лемма 1. *Если q, $cq+b$ и cq^2+b — целые числа, то cq^n+b — целое при любом натуральном n.*

В самом деле, рассмотрим разность

$$(cq^{n+1}+b)-(cq^n+b)=cq^n(q-1)=q^{n-1}[(cq^2+b)-(cq+b)].$$

Это число — целое, а потому, согласно (2), cq^n+b — целое при любом натуральном n. (Можно рассуждать несколько иначе: рассмотреть разность $(cq^n+b)-(cq+b)$ и воспользоваться (1).)

Итак, при $k=1$ теорема 2 верна. Теперь точно так же, рассмотрев разности, можно доказать ее для $k=2$, затем для $k=3$ и т. д. — индукцией по k. В самом деле, если степень $k-1$ многочлена $b(n)=b_0+b_1n+\ldots+b_{k-1}n^{k-1}$ больше нуля, то разность

$$g(n)=f(n+1)-f(n)=cq^{n+1}-cq^n+b(n+1)-b(n)=c(q-1)\cdot q^n+\Delta b(n)$$

будет представляться как сумма геометрической прогрессии (с тем же знаменателем q) и многочлена, степень которого на единицу меньше, причем в условиях теоремы 2 числа q и $g(n)$ при $1\leqslant n\leqslant k$ — целые, так что для $g(n)$ теорему 2 можно считать доказанной.

Замечание. Теорему 2 можно, очевидно, слегка обобщить: достаточно проверить, что в каких-то $k+1$ последовательных целых точках $n_0\leqslant n\leqslant n_0+k$ данное выражение принимает целые значения — тогда оно будет принимать целые значения при всех следующих n. Например, иногда удобно при проверке начинать с $n_0=0$ или $n_0=-1$.

Это замечание, как и доказанное выше следствие, относятся также к теореме 1 и ко всем обобщениям, о которых пойдет речь ниже.

Как придумать новую задачу?

Нет ничего проще. Подберем, например, a, b и c так, чтобы выражение $f(n)=an+b+c\cdot 9^n$ принимало (какие угодно!) целые значения при $n=-1$, $n=0$ и $n=1$. Тогда по теореме 2 (при $k=2$) число $f(n)$ будет целым при любом целом $n\geqslant -1$.

Возьмем, скажем, $f(-1)=-1$, $f(0)=0$, $f(1)=4$. Решив систему

$$\begin{cases}-a+b+c/9=-1,\\ b+c=0,\\ a+b+9c=4,\end{cases}$$

мы найдем $a=\frac{5}{8}$, $b=-\frac{27}{64}$, $c=\frac{27}{64}$.

Именно так, возможно, и был придуман когда-то давно пример г). Советуем читателю в качестве отдыха самому придумать несколько новых примеров.

Но наш путь еще не закончен: теорему хотелось бы обобщить так, чтобы она включала и примеры, где имеется несколько геометрических прогрессий.

Сумма прогрессий

Попробуйте доказать такой аналог наших теорем 1 и 2:

Теорема 3. *Если $q_1, q_2, \ldots, q_r$ — целые числа и*

$$f(n)=c_1q_1^n+c_2q_2^n+\ldots+c_{r-1}q_{r-1}^n+c_rq_r^n$$

— целое при $n=1, 2, \ldots, r$, то $f(n)$ — целое при любом натуральном n. (Лемма 1 — частный случай этой теоремы при $r=2$, $q_2=1$.)

Указание. Для доказательства теоремы 3 полезно рассмотреть разность $g(n)=f(n+1)-q_rf(n)$. Поскольку

$$g(n)=c_1(q_1-q_r)q_1^n+\ldots+c_{r-1}(q_{r-1}-q_r)q_{r-1}^n$$

— сумма $r-1$ геометрических прогрессий и в условиях теоремы число $g(n)$ — целое при $1\leqslant n\leqslant r-1$, доказать теорему можно индукцией по r: ведь

$$f(n)=g(n-1)+q_rg(n-2)+\\ +q_r^2g(n-3)+\ldots+q_r^{n-1}g(1)+q_r^nf(1).$$

(Так, в задаче з) можно рассмотреть разность $f(n+1)-45f(n)$.)

Упражнение 1. Проверьте примеры а), е) с помощью теоремы 3 и придумайте к ней несколько новых примеров.

Мы надеемся, что пробудили у читателя страсть к обобщениям, и предлагаем ему следующие, более трудные упражнения:

2. Сформулируйте и докажите аналоги теорем 1—3

а) для суммы r прогрессий и многочлена степени $k-1$;

б) для произведения прогрессии (с целым знаменателем) на многочлен.

Придумайте несколько примеров на применение ваших теорем.

3. Какую более общую теорему такого типа вы можете сформулировать?

4. Можно ли в условиях ваших теорем уменьшить число точек, в которых требуется проверка?

5. Докажите утверждение и) и постарайтесь обобщить теорему 3 так, чтобы она годилась и для прогрессий с иррациональными знаменателями.

Указание. $[(6+\sqrt{31})^n]+1=(6+\sqrt{31})^n+(6-\sqrt{31})^n$, причем $y_1=6+\sqrt{31}$ и $y_2=6-\sqrt{31}$ — корни квадратного уравнения $y^2-12y+5=0$ с целыми коэффициентами.

Самая общая теорема

Найти естественное обобщение ряда фактов бывает интересно еще потому, что очень часто более общее утверждение доказывается яснее и проще, чем частное. Прекрасная иллюстрация этому — следующая теорема, довольно громоздкая по формулировке, но обобщающая предыдущие и позволяющая ответить на все вопросы упражнений 2—5.

Теорема 4. *Пусть выражение $f(n)$ является суммой r многочленов, умноженных на некоторые геометрические прогрессии. Составим многочлен со старшим коэффициентом 1, корни которого — знаменатели этих r прогрессий, а кратность каждого корня на единицу больше степени соответствующего ему многочлена.* (Степень k этого *характеристического* многочлена равна сумме количества r прогрессий и степеней всех многочленов, на которые они умножены.) *Если (1) все коэффициенты характеристического многочлена — целые числа и (2) значения $f(n)$ — целые при $n=1, 2, \ldots, k$, где k — степень характеристического многочлена, то $f(n)$ будет целым и при всех натуральных $n>k$.*

Разумеется, для выполнения условия (1) достаточно (но не обязательно), чтобы все знаменатели прогрессий были целыми числами. Какова роль коэффициентов характеристического многочлена — ясно из следующей очень важной леммы, проверку которой мы оставляем читателю:

Лемма 2. Пусть

$$f(x)=B_1(x)q_1^x+B_2(x)q_2^x+\ldots+B_r(x)q_r^x, \quad (3)$$

где $B_i(x)$ — многочлен степени k_i-1 $(i=1, 2, \ldots, r)$, и

$$D(\lambda)=(\lambda-q_1)^{k_1}(\lambda-q_2)^{k_2}\ldots(\lambda-q_r)^{k_r}=\lambda^k+d_1\lambda^{k-1}+d_2\lambda^{k-2}+\ldots+d_{k-1}\lambda+d_k.$$

Тогда при всех x выполнено равенство:

$$f(x)+d_1f(x-1)+d_2f(x-2)+\ldots+d_kf(x-k)=0. \quad (4)$$

Теорема 4 следует отсюда сразу же: если все коэффициенты $d_1, \ldots, d_k$ характеристического многочлена $D(\lambda)$ — целые, то из равенства (3) вытекает, что $f(n)$ при каждом $n>k$ получается сложением целых значений $f(n-1)$, $f(n-2), \ldots, f(n-k)$, умноженных на фиксированные целые коэффициенты.

В качестве иллюстрации рассмотрим два прежних примера.

д) Пусть $f(n)=\frac{1}{2}\cdot 4^n+(-9n^2+21n-14)\cdot 1^n$. Здесь $D(\lambda)=(\lambda-4)(\lambda-1)^3=\lambda^4-7\lambda^3+15\lambda^2-13\lambda+4$. Поэтому для всех n

$$f(n)=7f(n-1)-15f(n-2)+13f(n-3)-4f(n-4).$$

В частности, вслед за $f(1)=f(2)=f(3)=0$ и $f(4)=54$ идут $f(5)=7\cdot 54=378$, $f(6)=7\cdot 378-15\cdot 54=1836, \ldots$; естественно, все они будут делиться на 27 (даже на 54).

и) Пусть $f(n)=\frac{(6+\sqrt{31})^n}{10}+\frac{(6-\sqrt{31})^n}{10}-\frac{2^n}{10}$. Здесь коэффициенты многочлена $D(\lambda)=(\lambda^2-12\lambda+5)(\lambda-2)=\lambda^3-14\lambda^2+19\lambda-10$ — также целые. Вслед за первыми членами $f(0)=\frac{1}{10}$, $f(1)=1$, $f(2)=13$ все дальнейшие $f(n)$ определяются рекуррентным соотношением

$$f(n)=14f(n-1)-19f(n-2)+10f(n-3).$$

В частности, $f(3)=14\cdot 13-19\cdot 1+\frac{10}{10}=124$ — целое, следовательно, будут целыми числами также все $f(n)$ при $n=4, 5, \ldots$

В качестве последнего упражнения предлагаем читателю разобраться в том, как с помощью леммы 2 можно доказать частные случаи теоремы 4, о которых шла речь выше, и придумать новые упражнения (например, в качестве q_1, q_2, q_3 можно взять числа $2\cos\frac{\pi}{7}$, $2\cos\frac{2\pi}{7}$, $2\cos\frac{3\pi}{7}$, впрочем, убедиться, что это — корни многочлена с целыми коэффициентами, не так просто!).

Заканчивая наш рассказ, заметим, что для выяснения более глубоких вопросов делимости целых чисел наши теоремы не приносят большой пользы (например, чтобы доказать, что $n^{1693}-n$ при всех n делится на 1981 или хотя бы на 6, требуется проверка в 1694 точках!).

Однако замечательный результат, который скрыт в лемме 2, относится по существу уже к совершенно другой, не менее интересной и важной теме: *линейным рекуррентным уравнениям*. Можно показать, что в с е последовательности $f(n)$, определяемые формулой (4) и л ю б ы м и начальными членами $f(1), \ldots, f(k)$, задаются формулой (3) (для того, чтобы этот результат сформулировать в естественной общности, нужно рассматривать не только вещественные, но и комплексные корни многочлена $D(\lambda)$). С выражениями (3) наши читатели, без сомнения, еще встретятся, когда будут знакомиться с дифференциальными уравнениями: общий вид решений любого линейного дифференциального уравнения степени k

$$y^{(k)}+d_1y^{(k-1)}+\ldots+d_{k-2}y''+d_{k-1}y'+d_ky=0$$

имеет такую же форму (3).

Задачник Кванта

Задачи

М686—М690; Ф698—Ф702

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 августа 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М686, М687» или «Ф698». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М686. Для любого ли числа $x \geqslant 1$ верно равенство

$$[\sqrt{[x]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}]\,?$$

(Здесь через $[y]$ обозначена целая часть числа y.)

В. Прасолов

М687. а) В девятиугольной пирамиде все 9 боковых ребер и все 27 диагоналей основания окрашены: некоторые — в красный цвет, остальные — в синий. Докажите, что существуют три вершины пирамиды, служащие вершинами треугольника, все стороны которого окрашены в одинаковый цвет.

б) Верно ли аналогичное утверждение для восьмиугольной пирамиды?

Н. Ненов (Болгария)

М688. Даны натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ такие, что $a_k \leqslant k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Докажите, что одно из выражений

$$a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm \dots \pm a_n$$

равно нулю.

С. Ненашев

М689*. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренных трапеций с основаниями 3 см, 1 см и высотой 1 см, нельзя составить прямоугольник.

С. Рукшин

М690*. а) Внутри выпуклого многоугольника площади S_1 и периметра P_1 расположен выпуклый многоугольник площади S_2 и периметра P_2. Докажите неравенство

$$2\frac{S_1}{P_1} > \frac{S_2}{P_2}.$$

б) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для выпуклых многогранников.

А. Кеnарев

Ф698. На некотором производстве детали перемещают с помощью двух транспортеров, ленты которых движутся во взаимно перпендикулярных направлениях с одинаковыми по абсолютной величине скоростями v_0 (рис. 1). При этом деталь, въезжая на транспортер II, останавливается на середине ленты. Скорость транспортера II увеличили в n раз. Как надо изменить скорость транспортера I, чтобы детали по-прежнему останавливались на середине ленты транспортера II? Размерами деталей пренебречь; считать, что переход на транспортер II происходит без удара.

А. Омельянчук

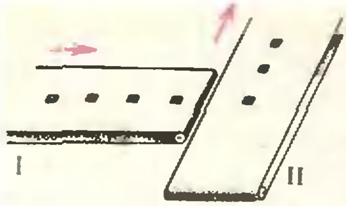


Рис. 1.

Ф699. Изогнутый капилляр радиуса r (рис. 2), полностью заполненный жидкостью, вращается вокруг вертикальной оси OO'. При какой угловой скорости вращения жидкость начнет выливаться из капилляра? Плотность жидкости ϱ, поверхностное натяжение σ, жидкость полностью смачивает капилляр; размеры капилляра указаны на рисунке 2.

А. Буздин

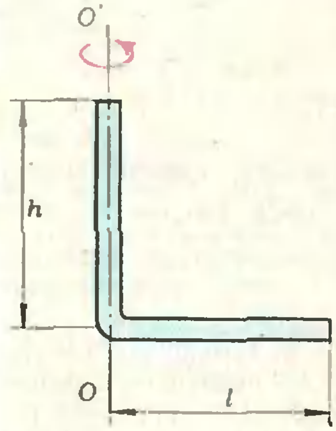


Рис. 2.

Ф700. Имеются два проводника A и B произвольной формы. Первоначально на проводнике A имеется заряд Q, а проводник B не заряжен. Проводники приводят в соприкосновение (рис. 3), и на проводник B перетекает заряд q. Соприкасающимся проводникам сообщили дополнительно некоторый заряд q_x, и в результате на проводнике A оказался заряд q. Определить заряд q_x.

С. Кротов

Рис. 3.

Ф701. На рисунке 4 показано распределение температуры вдоль тонкого однородного теплоизолированного стержня в некоторый момент времени. Как будет меняться распределение температуры в дальнейшем? Какое распределение установится через достаточно долгое время?

О. Савченко

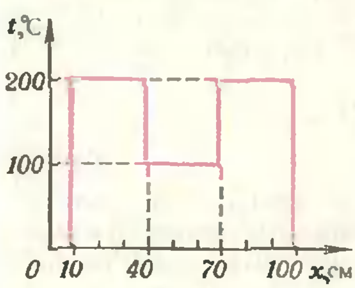


Рис. 4.

Ф702. Две системы, каждая из которых состоит из двух одинаковых масс m, связанных пружинкой жесткости k, движутся по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу с одинаковыми по величине скоростями v_0. В некоторый момент времени расстояние между системами равно L (рис. 5). Определить время, через которое расстояние между теми же массами снова будет равно L. Столкновение систем считать абсолютно упругим.

В. Можаев

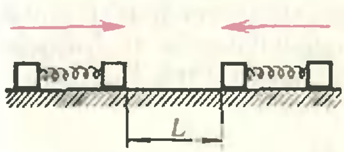
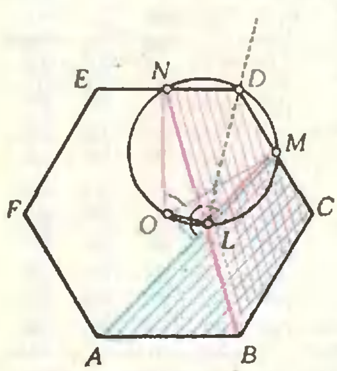


Рис. 5.

Решения задач

М641—М644; Ф657—Ф662

М641. *Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$ с центром O. Точки M и N — середины сторон CD и DE. Прямые AM и BN пересекаются в точке L. Докажите, что*
а) треугольник ABL и четырехугольник $DMLN$ имеют равные площади;
б) $\widehat{ALO}-\widehat{OLN}=60°$;
в) $\widehat{OLD}=90°$.



Все утверждения задачи нетрудно получить из одного наблюдения: при повороте на 60° вокруг центра O четырехугольник $AMCB$ отображается на четырехугольник $BNDC$.

Действительно, при повороте $R_O^{60°}$ (против часовой стрелки) точка A переходит в точку B, точка B — в точку C, сторона CD отображается на сторону DE, так что середина M стороны CD переходит в середину N стороны DE (см. рисунок). Следовательно, четырехугольники $AMCB$ и $BNDC$ конгруэнтны, так что площади их равны. Вычитая из этих равных площадей площадь четырехугольника $BCML$, получим равные площади, то есть треугольник ABL и четырехугольник $DMLN$ равновелики.

Так как при повороте $R_O^{60°}$ луч AM отображается на луч BN, угол между направлениями этих лучей равен углу поворота, то есть $\widehat{ALB}=60°$. Следовательно, $\widehat{ALN}=120°$. Приведем два доказательства того, что $\widehat{ALO}=\widehat{OLN}=60°$ и $\widehat{OLD}=90°$.

1°. Воспользуемся таким очевидным фактом: если две прямые, пересекающиеся в точке K, равноудалены от точки P, то прямая PK служит биссектрисой угла между этими прямыми (содержащего точку P). Поскольку точка O равноудалена от прямых AM и BN, OL — биссектриса угла ALN, то есть $\widehat{ALO}=\widehat{OLN}=60°$. Поскольку точка D удалена от прямых AM и BN одинаково (на такое же расстояние, как C — от прямой AM), $\widehat{NLD}=\widehat{DLM}=30°$, то есть $\widehat{OLD}=90°$.

2°. Около четырехугольника $DMON$ можно описать окружность, так как углы при его вершинах M и N — прямые. Точка L также принадлежит этой окружности. Это следует из того, что в четырехугольнике $DMLN$ сумма углов при вершинах D и L равна 180°. Заметив, что $\widehat{ODN}=60°$, применим теорему о вписанном угле. Тогда получим $\widehat{OLN}=\widehat{ODN}=60°$ и $\widehat{OLD}=\widehat{OMD}=90°$.

Э. Готман

◆

М642. *Докажите, что каждое натуральное число представляется в виде $a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n$, где каждое из чисел $a_k=0, -1$ или 1 и $a_k\cdot a_{k+1}=0$ для всех $0\leqslant k\leqslant n-1$, причем такое представление единственно.*

Рассматривая требуемые представления

$$A=a_0+2a_1+2^2a_2+\ldots+2^na_n \qquad (*)$$

($a_k=0$, -1 или 1, $a_k\cdot a_{k+1}=0$) для нескольких первых натуральных чисел, нетрудно заметить, что

1) последний знак + стоит при 2^n (старшая цифра $a_n=+1$) для чисел A от $2^n-2^{n-2}-2^{n-4}-\ldots$ до $2^n+2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots$ (например, в нашей таблице на полях последний знак + стоит при 2^3 для чисел A от $2^3-2=6$ до $2^3+2=10$, при 2^4 — для чисел A от $2^4-2^2-1=11$ до $2^4+2^2+1=21$ и т. д.);

2) первый знак (младшая цифра $a_0\neq 0$) периодически повторяется с периодом 4, то есть зависит лишь от остатка при делении A на 4 ($a_0=0$ повторяется даже чаще — с периодом 2).

На этих двух наблюдениях построены два доказательства нужного представления (*) и его единственности. Оба эти доказательства проводятся по индукции, то есть справедливость утверждения для данного числа A выводится из его справедливости для всех чисел, меньших A.

1°. Обозначим через M_n число $2^n+2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots$ (последнее слагаемое здесь $2^1=2$ при нечетном n и $2^0=1$ при четном n). Докажем, что *каждое число $A\leqslant M_n$ представляется в виде (*) единственным образом, причем* $a_n=1$ для чисел

$$2^n-M_{n-2}\leqslant A\leqslant 2^n+M_{n-2}=M_n. \qquad (1)$$

A	1	2	2^2	2^3	2^4
1	+				
2		+			
3	—		+		
4			+		
5	+		+		
6		—		+	
7	—			+	
8				+	
9	+			+	
10		+		+	
11	—		—		+
12			—		+
13	+		—		+
14		—			+
15	—				+
16					+
17	+				+
18		+			+
19	—		+		+
20			+		+
21	+		+		+

Мы можем (поскольку мы доказываем по индукции) считать наше утверждение доказанным для чисел A, не превосходящих M_{n-2}. Пользуясь этим, мы получим представление (*) для любого целого числа A из промежутка (1). В самом деле, либо $A=2^n$, либо $1\leqslant A-2^n\leqslant M_{n-2}$, либо $1\leqslant 2^n-A\leqslant M_{n-2}$. Добавляя к 2^n представление числа $A-2^n$ или вычитая из него представление числа 2^n-A, мы получим представление (*) для A.

Заметим, что

$$2^n-M_{n-2}-1=M_{n-1}; \tag{2}$$

это равенство становится очевидным, если записать его так:

$$2^n-1=M_{n-2}+M_{n-1}=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1.$$

Как видно из равенства (2), промежутки (1) для $n=1, 2, 3, \ldots$ не перекрываются и заполняют все множество натуральных чисел **N**, поэтому представление (*) существует для любого A. Отсюда ясна также его единственность: по данному $A\in \mathbf{N}$ однозначно определяется разряд n старшей цифры $u_n=1$, а добавок $|2^n-A|$ представляется единственным образом по предположению индукции.

2°. Если A четно, то $u_0=0$ и представление (*) числа $A=2m$ получается из представления меньшего числа m «сдвигом» на один разряд. Если A нечетно, то $u_0=\pm 1$ и u_1 должно равняться нулю; поэтому число $A-u_0$ делится на 4 и представление (*) числа $A=4m+u_0$ получается из представления меньшего числа m «сдвигом» на два разряда и добавлением слева цифры u_0. Во всех этих случаях единственность представления числа A следует из единственности представления числа m.

Единственность представления числа 1 очевидна: если $n>1$ и $|u_n|=1$, то $|u_0+u_1\cdot 2+\ldots+u_n\cdot 2^n|\geqslant 2^n-(2^{n-2}+2^{n-4}+\ldots)\geqslant 2$.

Н. Васильев

◆

М643. *Карточки с числами 1, 2, ..., 32 сложены в стопку по порядку. Разрешается снять сверху любое число карточек и вложить их между некоторыми из оставшихся или под ними, не меняя порядка тех и других, а в остальном произвольно. Эта операция называется перемешиванием.*

I. Докажите, что за 5 перемешиваний можно

а) переложить карточки в обратном порядке;

б) разложить карточки в любом порядке.

II. Докажите, что не всякий порядок карточек можно получить за 4 перемешивания.

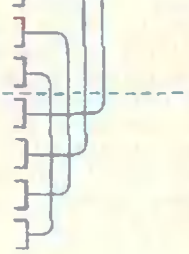


Рис. 1.

Приведем два решения этой задачи.

Первое решение. Будем считать, что карточки в стопке расположены в произвольном порядке. Докажем, что за пять перемешиваний их можно упорядочить, а за четыре — не всегда. Тем самым задача будет решена.

Назовем *отрезком* группу лежащих подряд карточек, номера которых возрастают при удалении от верха стопки. *Длиной* отрезка будем называть количество входящих в него карточек.

Если имеются два отрезка, то всегда можно, не меняя порядка следования карточек в каждом из них, перемешиванием получить отрезок, состоящий из карточек этих отрезков и только из них. Будем говорить, что такой отрезок получен операцией *слияния* двух отрезков. Понятно, что длина результата слияния равна сумме длин сливаемых отрезков.

Отметим сначала в стопке карточек 32 отрезка единичной длины и затем будем проделывать перемешивания так:

1) разделим стопку пополам;

2) сливаем попарно отмеченные отрезки соответственно из первой и второй половин стопки;

3) отметим отрезки, получившиеся в результате слияний пункта 2).

Эту операцию повторим пять раз (на рисунке 1 изображено, что происходит с отрезками, получившимися после второго слияния). Длины отрезков, отмеченных до перемешивания, вдвое меньше длин отрезков, отмеченных после него (см. рис. 1). Следовательно, после пяти таких операций длина (единственного!) отмеченного отрезка будет равна $2^5=32$. Это доказывает утверждения а) и б) задачи (для пункта а) нужные перемещения приведены на полях).

Для доказательства того, что произвольно расположенные карточки нельзя упорядочить за 4 перемешивания, введем

Рис. 2.

еще одно понятие. Назовем две соседние в стопке карточки *дефектной парой*, если карточка с большим номером находится выше карточки с меньшим номером.

Лемма. *Если в стопке $n>1$ дефектных пар, то после перемешивания в ней будет не менее чем $m = \left[\frac{n}{2}\right]$ дефектных пар.*

Доказательство. Разделив стопку на две, получим по крайней мере в одной из стопок не менее чем m дефектных пар. Действительно, пусть в одной стопке оказалось k, а в другой l дефектных пар. Если предположить, что $k \leqslant m-1$ и $l<m$, то $k+l<2m-1 \leqslant n-1$. Однако должно быть $k+l \geqslant n-1$, поскольку при разделении стопки могло «разойтись» не более одной дефектной пары. Значит, либо $k \geqslant m$, либо $l \geqslant m$.

Заметим теперь, что если между карточками дефектной пары вставлять любые карточки, то при этом образуется хотя бы одна дефектная пара (убедитесь, что это так для одной вставляемой карточки). Тем самым лемма доказана.

Пусть теперь в стопке более 15 дефектных пар. Применив доказанную лемму четыре раза, получим, что после четырех перемешиваний в стопке останется хотя бы одна дефектная пара.

В связи с последней леммой возникает интересная задача: *зная количество дефектных пар расположения, определить точно минимальное количество перемешиваний, необходимых для достижения этого расположения из упорядоченной стопки.* Оказывается, если N — количество дефектных пар расположения, то необходимо $[\log_2 N]+1$ перемешиваний.

Второе решение. I б) Рассмотрим операцию, обратную перемешиванию: из произвольных мест стопки вытаскиваем несколько карточек и кладем их сверху. При этом относительный порядок как среди вытащенных, так и среди оставшихся карточек не меняется. Докажем более общее утверждение: *2^n карточек, расположенных в произвольном порядке, можно упорядочить за n обратных перемешиваний.*

Доказательство проведем по индукции.

Для упорядочения двух карточек ($n=1$) достаточно одного обратного перемешивания. Пусть уже доказано, что для упорядочения 2^k карточек достаточно k обратных перемешиваний. Докажем, что 2^{k+1} карточек всегда можно упорядочить за $k+1$ обратных перемешиваний.

Рассмотрим какое-то расположение 2^{k+1} карточек в стопке. Стопки карточек с номерами от 1 до 2^k (назовем эту стопку *красной*) и с номерами от 2^k+1 до 2^{k+1} (назовем эту стопку *голубой*) — с относительным расположением карточек внутри каждой стопки таким же, как в стопке из 2^{k+1} карточек — по предположению индукции можно упорядочить за k обратных перемешиваний. Обозначим эти перемешивания через $A_1, A_2, \ldots, A_k$ для красной стопки и $B_1, B_2, \ldots, B_k$ для голубой.

Произведем теперь k обратных перемешиваний большой стопки (из 2^{k+1} карточек) следующим образом: при i-м обратном перемешивании вытаскиваем красные карточки, которые должны быть вытащены при перемешивании A_i, и голубые карточки, которые должны быть вытащены при перемешивании B_i, после чего кладем и те и другие на верх стопки — одни под другие (разобраться в том, что происходит, вам поможет рисунок 2). После k таких операций красная и голубая стопки оказываются упорядоченными. Остается за последнее, $(k+1)$-е перемешивание вытащить карточки красной стопки и положить их сверху.

II. Докажем, что если в стопке находится больше 2^n карточек, то за n перемешиваний их нельзя расположить в обратном порядке — по убыванию номеров.

Доказательство проведем по индукции. При $n=1$ число карточек в стопке не меньше трех. Так как при перемешивании мы либо берем сверху не менее двух карточек, либо оставляем не менее двух, после одного перемешивания найдутся две карточки, у которых не изменился относительный порядок.

Пусть утверждение задачи верно при $n=k$. Для $n=k+1$ предположим противное, то есть предположим, что за $k+1$

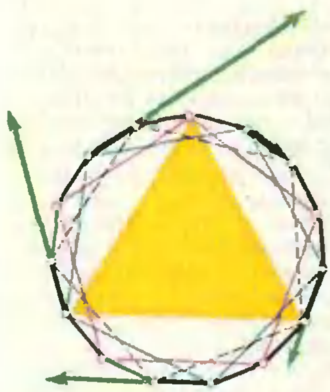
перемешиваний удалось получить обратный порядок в стопке, содержащей больше 2^{k+1} карточек. Посмотрим внимательнее, что происходит.

При первом перемешивании либо снимаются сверху, либо остаются неснятыми по крайней мере 2^k+1 карточек, что есть найдется стопка из 2^k+1 карточек, относительный порядок которой после первого перемешивания не изменился. Но по предположению индукции за оставшиеся k перемешиваний карточки этой стопки нельзя расположить в обратном порядке. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Ю. Лысов, В. Турчанинов

◆

М644. *а) Докажите, что существует выпуклый 1980-угольник со сторонами длины 1, 2,..., 1980, все углы которого равны по величине.*
б) Существует ли такой 1981-угольник?



Докажем, что если n не есть степень простого числа, то есть $n=p\cdot q$, $n>3$ и p и q — взаимно простые числа, отличные от единицы, то всегда можно составить n-угольник со сторонами длины 1, 2,..., n, параллельными сторонам правильного n-угольника. Так как $1980=4\cdot 495$, а $1981=7\cdot 283$, этим мы решим задачу.

Рассмотрим правильный n-угольник $(n=p\cdot q)$. Выделим среди его вершин p штук, образующих правильный p-угольник (на рисунке $n=15$, $p=3$, $q=5$). Теперь рассмотрим p наборов по q вершин нашего (правильного) n-угольника таких, что в каждом наборе эти вершины образуют правильный q-угольник, а первая вершина i-го набора совпадает с i-й вершиной выделенного p-угольника (см. рисунок). В силу взаимной простоты чисел p и q эти наборы не пересекаются. Поэтому ими исчерпываются все вершины n-угольника.

Теперь «устроим» p наборов по q векторов. Первые q векторов с длинами 1, 2,..., q расположим следующим образом: начала векторов поместим в последовательные вершины первого q-угольника, а направление каждого вектора возьмем совпадающим с направлением стороны n-угольника, прилегающей к соответствующей вершине q-угольника (направление обхода фиксировано). Обозначим сумму векторов первого набора через $\vec{b}_1$.

Второй набор q векторов получается так же, как и первый, только его «порождают» вершины второго q-угольника. Сумма $\vec{b}_2$ векторов второго набора при этом, очевидно, получается из вектора $\vec{b}_1$ поворотом на угол $360°/p$ вокруг центра n-угольника. Увеличив длину каждого вектора второго набора на q единиц, мы не изменим суммы $\vec{b}_2$, поскольку такое увеличение является добавлением q векторов, образующих правильный q-угольник (их сумма равна $\vec{0}$).

Так мы можем получить p наборов по q векторов: направления векторов i-го набора определяются вершинами i-го q-угольника, а длины их равны $1+q(i-1)$, $2+q(i-1)$,..., qi. Сумма $\vec{b}_i$ этих векторов получается из $\vec{b}_1$ поворотом на угол $360°\cdot(i-1)/p$ вокруг центра нашего n-угольника.

Из сказанного следует, что векторы $\vec{b}_i$ образуют правильный p-угольник. Следовательно, их сумма равна нулю, а значит, равна нулю и сумма всех $pq=n$ построенных векторов, направления которых соответствуют направлениям сторон нашего правильного n-угольника, а длины охватывают все натуральные числа от 1 до n. Остается последовательно расположить эти n векторов так, чтобы их направления соответствовали направлениям последовательных сторон правильного n-угольника.

При $n=p^k$, где p — простое, построить такой n-угольник нельзя, но элементарное доказательство этого факта нам неизвестно.

Ю. Лысов

◆

Ф657. *Радиусы кривизны двух одинаковых слипшихся друг с другом мыльных пузырей равны R. После того как перего-*

Рассмотрим условие равновесия двух слипшихся пузырей с перегородкой. Давление воздуха слева и справа от перегородки равно

$$p=p_0+\frac{4\sigma}{R},$$

родка между пузырями лопнула, образовался один пузырь радиуса R_1. Найти атмосферное давление. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора равен σ.

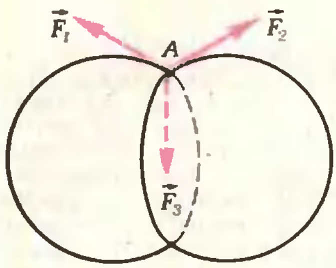


Рис. 1.

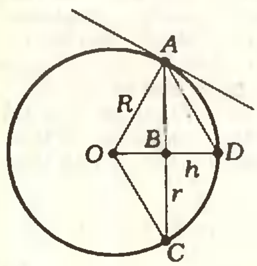


Рис. 2. $\widehat{OAB}=30°$;

$|OB|=\frac{1}{2}|OA|=\frac{1}{2}R$;

$r=\sqrt{R^2-\frac{R^2}{4}}=\frac{R\sqrt{3}}{2}$;

$h=|OD|-|OB|=$

$=R-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}$.

где p_0 — атмосферное давление, $4\sigma/R$ — избыточное давление в пузырях под искривленной поверхностью радиуса R (перед σ стоит коэффициент 4, а не 2, поскольку у мыльной пленки две поверхности). Условие равенства давлений слева и справа от перегородки означает, что перегородка плоская (в противном случае давления в пузырях должны были бы отличаться одно от другого на величину избыточного давления под искривленной поверхностью перегородки). Поскольку радиусы пузырей одинаковы, плоскость перегородки расположена на одинаковых расстояниях от центров пузырей.

На любой участок поверхности пленки, принадлежащий и перегородке, действуют три силы: две силы натяжения со стороны пленок, образующих собственно пузыри, и сила натяжения со стороны пленки-перегородки. Так как абсолютные значения этих сил одинаковы, в условиях равновесия эти силы направлены под углами 120° друг к другу (рис. 1).

Таким образом, в начальном состоянии воздух в пузырях при давлении $p=p_0+4\sigma/R$ занимает объем $V=2\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)-$ $-V'$, где $V'=2\cdot\frac{1}{6}\pi h\,(3r^2+h^2)$ — объем двух шаровых сегментов, «отсеченных» перегородкой от пузырей (рис. 2). Как видно из рисунка 2, радиус перегородки $r=R\sqrt{3}/2$, высота шарового сегмента $h=R/2$ и

$$V'=\frac{1}{3}\pi\frac{R}{2}\left(3\frac{3R^2}{4}+\frac{R^2}{4}\right)=\frac{5}{12}\pi R^3,$$

$$V=\frac{8}{3}\pi R^3-\frac{5}{12}\pi R^3=\frac{9}{4}\pi R^3.$$

После того как перегородка лопнула, воздух в пузыре радиуса R_1 занимает объем $V_1=\frac{4}{3}\pi R_1^3$ при давлении $p_1=p_0+\frac{4\sigma}{R_1}$.

Будем считать, что температура воздуха в пузырях остается неизменной (равной температуре окружающей среды). Тогда $\frac{p}{p_1}=\frac{V_1}{V}$, или

$$\frac{p_0+\frac{4\sigma}{R}}{p_0+\frac{4\sigma}{R_1}}=\frac{16}{27}\frac{R_1^3}{R^3}.$$

Отсюда находим атмосферное давление:

$$p_0=\frac{4\sigma(16R_1^2-27R^2)}{27R^3-16R_1^3}.$$

(Из выражения для p_0 следует, что радиусы R и R_1 связаны соотношением

$$\frac{3\sqrt[3]{4}}{4}<\frac{R_1}{R}<\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Убедитесь в этом самостоятельно.)

Т. Петрова

◆

Ф658. *Из баллона, в котором находятся сильно разреженные пары калия, через узкую горизонтальную трубку выходит пучок атомов. Определить температуру паров, если на горизонтальном пути длиной $l=50$ см среднее смещение атомов по вертикали составляет $h=3{,}2$ мкм.*

Температура паров определяется средней (точнее, среднеквадратичной) скоростью молекул паров:

$$T\approx\frac{\mu v_{ср}^2}{3R}. \qquad (1)$$

Для определения температуры надо найти $v_{ср}$.

Смещение по вертикали происходит в результате действия силы тяжести. Время τ движения молекул, длина l проходимого ими за это время пути и смещение h молекул по вертикали связаны соотношениями $\tau=l/v_{ср}=\sqrt{2h/g}$, откуда

$$v_{ср}=l\sqrt{\frac{g}{2h}}. \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1), находим

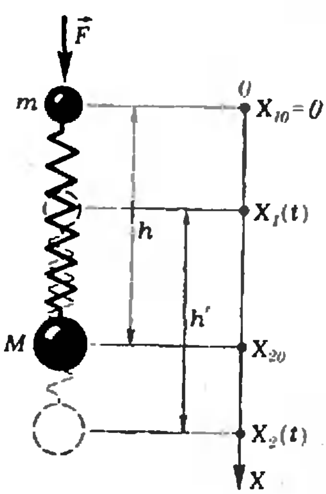
$$T \approx \frac{\mu l^2 g}{6Rh} \approx 6 \cdot 10^2\ \text{К}.$$

(Бо́льшая точность расчетов не нужна, поскольку мы довольно грубо оценили среднюю скорость движения молекул, воспользовавшись среднеквадратичной скоростью.)

А. Зильберман

◆

Ф659. *Небольшой станок массой $m=200$ кг вибрирует при работе из-за неоднородности тяжелого маховика, вращающегося с угловой скоростью 600 об/с. Чтобы снизить вибрации перекрытия в цехе, в котором установлен станок, под станину положили упругую прокладку толщиной $h=10$ см из материала с модулем упругости $E=3{,}1\times\times10^8$ Н/м². Площадь основания станины $S=2$ м². Приведет ли установка прокладки к уменьшению вибраций перекрытия?*



$h=X_{20}$;
$x_1=X_1(t)$, $x_2=X_2(t)-X_{20}$;
$h'=X_2(t)-X_1(t)$;
$\Delta h=h'-h=x_2-x_1$.

Колебания станка, вызванные вращением несбалансированного маховика приводят к появлению гармонической силы $F=F_0 \sin \omega t$, действующей со стороны станка на опору (F_0 — амплитуда, $\omega=2\pi f$ — круговая частота, f — частота силы). Взаимодействие станка и перекрытия, разделенных упругой прокладкой, можно исследовать на основе упрощенной системы двух точечных масс m и M, соединенных пружиной с жесткостью k (см. рисунок; роль масс играют соответственно станок и перекрытие, а пружина имитирует прокладку между ними). Жесткость k пружины (жесткость прокладки) равна

$$k=\frac{ES}{h}. \qquad (1)$$

Масса перекрытия M намного превышает массу станка m. Действительно, если перекрытие сделано из железобетона (плотность около 2500 кг/м³) и имеет толщину примерно 0,2 м, то масса лишь одного квадратного метра (поверхностная плотность) перекрытия составляет 500 кг, что уже намного превышает массу станка (по условию 200 кг).

Пусть x_1 и x_2 — смещения масс m и M вдоль оси OX относительно координат масс в невозмущенном состоянии. Тогда ускорения масс, согласно второму закону Ньютона, можно записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{a}_1=x_1''&=-\frac{k\Delta h}{m}+\frac{F}{m}=\frac{k}{m}(x_2-x_1)+\frac{F_0}{m}\sin\omega t,\\ \vec{a}_2&=\frac{k\Delta h}{M}=\frac{k}{M}(x_1-x_2) \end{aligned} \qquad (2)$$

При гармонических колебаниях $x_1=A_1\sin\omega t$, $x_2=A_2\sin\omega t$, $a_1=-\omega^2A_1\sin\omega t$, $a_2=-\omega^2A_2\sin\omega t$, где A_1, A_2 — амплитуды колебаний масс m и M соответственно. Подставляя эти выражения в (2), получим

$$\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)A_1-\frac{k}{m}A_2=\frac{F_0}{m},$$
$$-\frac{k}{m}A_1+\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)A_2=0,$$

или

$$\begin{aligned} -\omega^2A_1+\frac{k}{m}(A_1-A_2)&=\frac{F_0}{m},\\ -\omega^2A_2-\frac{k}{m}(A_1-A_2)&=0. \end{aligned} \qquad (2')$$

Отсюда находим

$$A_1-A_2=\frac{F_0}{m}\cdot\frac{1}{-\omega^2+\dfrac{k(m+M)}{mM}}=\frac{F_0}{m(\omega_p^2-\omega)}, \qquad (2'')$$

где

$$\omega_p=\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM}}$$

— резонансная круговая частота гармонических колебаний системы масс, соединенных пружиной. При $M\gg m$

$$\omega_p\approx\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (3)$$

Из (2′) (2″) определяем амплитуду смещения массы M:

$$A_2=\frac{F_0}{(m+M)\omega^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2-1}.$$

В отсутствие прокладки сила F сообщает системе станок — перекрытие с массой $m+M$ ускорение

$$|\vec{a}_0|=\frac{|\vec{F}|}{m+M}.$$

Амплитуду A_0 колебаний в этом случае находим из условия $a_0=-\omega^2A_0\sin\omega t$:

$$A_0=-\frac{F_0}{(m+M)\omega^2}.$$

Таким образом, отношение амплитуд смещения перекрытия после установки прокладки и до этого равно

$$\frac{A_2}{A_0}=\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2}=\frac{1}{1-\left(\frac{f}{f_p}\right)^2}, \qquad (4)$$

где

$$f_p=\frac{1}{2\pi}\omega_p\approx\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ES}{hm}}\approx 885\ \text{Гц}$$

(см. (1) и (3)). Так как по условию $f=600$ Гц, из (4) находим

$$\frac{A_2}{A_0}=\frac{1}{1-\left(\frac{600}{885}\right)^2}\approx 1{,}85,$$

то есть вибрации после установки прокладки усилятся.

Как же уменьшить воздействие на перекрытие? Как видно из формулы (4), этого можно добиться, выбирая параметры прокладки таким образом, чтобы выполнялось условие $f_p\ll f$, то есть следует выбирать материал для прокладки с малым модулем Юнга или увеличивать толщину прокладки. Так, если $E=3{,}1\cdot10^6$ Н/м², то есть в 100 раз меньше, чем по условию задачи, то можно получить

$$\left|\frac{A_{20}}{A'_{20}}\right|\approx 0{,}02,$$

то есть вибрация перекрытия значительно уменьшается.

Р. Винокур

Ф660. *Поплавок, изготовленный из однородного материала, имеет форму чечевицы — тела, ограниченного двумя сферическими поверхностями радиусов $R_1=R_2=R=3$ см. Максимальная толщина чечевицы $h=4$ см; масса чечевицы $m_1=5$ г. В поплавок на всю толщину вдоль оси симметрии воткнута спица длиной $l=10$ см и массой $m_2=3$ г. Устойчиво ли положение поплавка, когда он плавает на поверхности воды спицей вверх? Считать, что в жидкость погружена меньшая часть чечевицы.*

◆

Убедиться в том, что в жидкость погружена меньшая часть чечевицы, можно, воспользовавшись данными, приведенными в условии задачи. Условие равновесия поплавка в положении «спицей вверх» — $\vec{F}_т+\vec{F}_A=\vec{0}$, или $|\vec{F}_т|-|\vec{F}_A|=0$, где $|\vec{F}_т|=(m_1+m_2)|\vec{g}|$ — сила тяжести, действующая на поплавок со спицей, $|\vec{F}_A|=\varrho_в|\vec{g}|V'$ — выталкивающая сила (V' — объем погруженной в воду части поплавка). Из равенства

$$(m_1+m_2)|\vec{g}|=\varrho_в|\vec{g}|V'$$

определяем V':

$$V'=\frac{m_1+m_2}{\varrho_в}=8\ \text{см}^3.$$

Объем половины чечевицы (объем шарового сегмента) равен

$$V=\frac{1}{6}\pi h_1(3r^2+h_1^2)\approx 29\ \text{см}^3$$

(см. рис. 1). Условие $V'<V$ и означает, что в воду погружена меньшая часть чечевицы.

Теперь рассмотрим вопрос об устойчивости поплавка в положении «спицей вверх». Будем считать, что при малом отклонении поплавка, когда спица составляет малый угол α с вертикалью (рис. 2), погруженная в воду часть поплавка

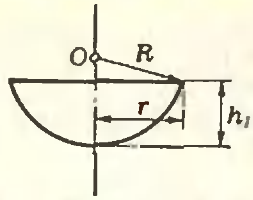


Рис. 1. $R=3$ см; $h_1=h/2=2$ см; $r=\sqrt{R^2-(R-h_1)^2}=\sqrt{8}$ см.

по-прежнему имеет форму шарового сегмента и осадка поплавка не меняется. (Отклонение поплавка — это поворот его вокруг точки O, то есть вокруг центра сферы, ограничивающей нижнюю часть поплавка.) Это условие означает, что, как и раньше, $\vec{F}_т+\vec{F}_А=\vec{0}$. Если в результате отклонения появляющиеся моменты сил стремятся возвратить поплавок в прежнее положение, это положение — «спицей вверх» — устойчиво; если моменты сил таковы, что поплавок будет продолжать отклоняться, положение «спицей вверх» неустойчиво.

Пока поплавок был в положении равновесия, силы $\vec{F}_т$ и $\vec{F}_А$ были приложены вдоль одной прямой — вертикали, проходящей через спицу. Сила $\vec{F}_т$ приложена в точке C — в центре масс поплавка со спицей, а сила $\vec{F}_А$ приложена в точке O (сила $\vec{F}_А$ есть результирующая сил давления, действующих со стороны воды на поплавок). Точка C находится на расстоянии $x=|DC|$ (см. рис. 2) от дна поплавка таком, что

$$m_1\left(\frac{l}{2}-x\right)=m_2\left(x-\frac{h}{2}\right);$$

отсюда

$$x=\frac{m_1 l/2+m_2 h/2}{m_1+m_2}=3{,}125 \text{ см}.$$

Точка O находится на расстоянии $|DO|=R=3$ см от дна поплавка. Следовательно, точка C лежит выше точки O.

При малом отклонении поплавка (при повороте вокруг точки O) точка приложения силы $\vec{F}_А$ остается прежней — точка O; точка же C смещается с вертикали DC. Таким образом, при отклонении поплавка на него действует пара сил; моменты этих сил стремятся повернуть поплавок в сторону дальнейшего отклонения от положения равновесия (на рисунке 2 — против часовой стрелки).

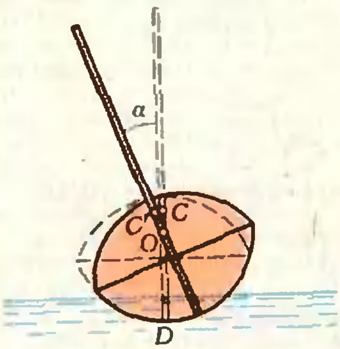


Рис. 2.

Следовательно, положение поплавка «спицей вверх» — положение неустойчивого равновесия.

Д. Кузнецов

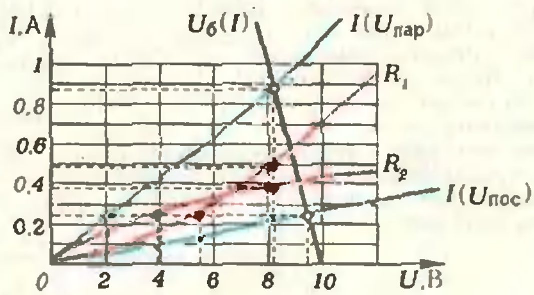
◆

Ф661. *На рисунке приведены вольтамперные характеристики двух нелинейных резисторов R_1 и R_2. Какими будут токи, идущие через резисторы и источник с ЭДС $\mathcal{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом, если оба резистора подключить к источнику, соединив их а) последовательно, б) параллельно?*

Если резисторы соединены последовательно, то при каждом значении тока напряжение $U_{пос}$ на участке цепи, содержащем резисторы, равно сумме напряжений на каждом из них. При параллельном соединении ток в цепи при каждом значении напряжения $U_{пар}$ на резисторах равен сумме токов, текущих через каждый из них. Зависимости $I(U_{пос})$ и $I(U_{пар})$ построены на рисунке.

Напряжение $U_б$ на зажимах батареи меняется при изменении тока в цепи:

$$U_б=\mathcal{E}-rI=10-2I.$$



Зависимость $I(U_б)$ также построена на рисунке. Точки пересечения прямой $I(U_б)$ с кривыми $I(U_{пос})$ и $I(U_{пар})$ дают значения токов и напряжения в цепи соответственно при последовательном и параллельном соединениях резисторов.

Из рисунка находим:

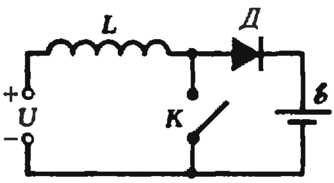
а) $I_1=I_2=I_б=0{,}25$ А; $U_1=5{,}5$ В, $U_2=3{,}9$ В;

б) $I_1=0{,}49$ А, $I_2=0{,}38$ А, $I_б=0{,}87$ А; $U_1=U_2=9{,}2$ В. (Цифры, разумеется, приближенные — график довольно мелкий, и более точные значения получить трудно.)

А. Зильберман

◆

Ф662. *Для подзарядки аккумулятора с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В от мощного источника напряжения $U=5$ В собрана схема из катушки с индуктивностью $L=1$ Гн, диода Д и прерывателя К (см. рисунок), который периодически замыкается и размыкается на одинаковые промежутки времени $\tau_1=\tau_2=0{,}01$ с. Определить средний ток заряда аккумулятора.*



Для того чтобы найти средний ток заряда аккумулятора, нужно определить заряд, протекающий на аккумуляторе за один цикл замыкания — размыкания ключа.

Когда ключ замкнут, катушка непосредственно подключена к источнику и возникающая ЭДС самоиндукции равна U. Значит, ток через катушку меняется по линейному закону. Считая, что в момент замыкания ключа ток через катушку отсутствовал, получим

$$I=\frac{U}{L}t.$$

К моменту размыкания ключа ток будет равен

$$I_0=\frac{U}{L}\tau_1.$$

После размыкания ключа диод откроется и ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_{си}$ станет равной разности напряжения батареи и аккумулятора — $\mathscr{E}_{си}=U-\mathscr{E}$ — и изменит знак. Значит, ток через катушку начнет линейно убывать по закону

$$I=I_0-\frac{\mathscr{E}-U}{L}t.$$

Скорость убывания тока (при разомкнутом ключе) оказывается больше скорости возрастания тока (при замкнутом ключе). Это означает, что еще до истечения времени τ_2 через время τ_3 (от момента размыкания ключа) ток упадет до нуля и в этот момент диод закроется. Время τ_3, в течение которого аккумулятор подзаряжается, найдем из условия

$$\frac{\mathscr{E}-U}{L}\tau_3=I_0=\frac{U}{L}\tau_1,$$

откуда

$$\tau_3=\frac{U}{\mathscr{E}-U}\tau_1.$$

Заряд, который протечет через аккумулятор за это время равен

$$\Delta q=I_{ср}\tau_3=\frac{1}{2}I_0\frac{U}{\mathscr{E}-U}\tau_1=\frac{1}{2}\frac{U^2\tau_1^2}{L(\mathscr{E}-U)}.$$

Средний ток заряда аккумулятора равен

$$I_{ср}=\frac{\Delta q}{\tau_1+\tau_2}=\frac{U^2\tau_1^2}{2L(\mathscr{E}-U)(\tau_1+\tau_2)}\approx 8{,}9\ \text{мА}.$$

А. Зильберман

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М626—М630, М641—М645 и Ф633—Ф662 [жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач].

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, успешно справились с задачами **М630**, **М641**. Остальные задачи решили: *Э. Абдуллаев* (Масаллы) **26, 28**; *В. Алексеев* (Москва) **26, 29**; *М. Алексеев* (Москва) **26, 45**; *А. Аралкин* (Новокузнецк) **27**; *М. Араспанов* (Запорожье) **28**; *Я. Базалий* (Донецк) **26, 29**; *А. Барг* (Киев) **28, 29, 43, 45**; *С. Баталов* (Арзамас) **42, 45**; *Е. Белова* (Видное) **26**; *Ю. Белоцерковский* (Минск) **26 27, 29, 42, 45**; *М. Беруашвили* (Хашури) **26**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **26, 28, 29**; *И. Блюсс* (Днепропетровск) **26**; *А. Болдырихин* (Могилев-Подольский) **26**; *А. Брудный* (Ярославл) **26—29, 42**; *А. Вольнов* (Киев) **26**; *А. Гаврилов* (Белгород-Днестровский) **28**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **42, 43, 45**; *М. Гапонова* (Горький) **26**; *В. Гешкенбейн* (Москва) **26, 42, 44, 45**; *З. Гиунашвили* (Тбилиси) **26**; *С. Горшков* (Москва) **42**; *Е. Горшкова* (Пермь) **26, 42, 44**; *А. Григорьян* (Ленингр д) **26, 27**; *В. Грина* (п. Дятлово Гродненской обл.) **26**;

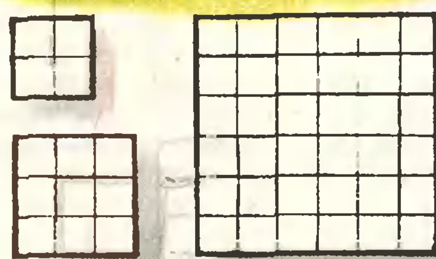
С. Гузов (Львов) **26, 27**; *А. Гутин* (Клинцы) **26, 27, 42**; *В. Денисов* (Кашира) **26, 42**; *С. Дипчак* (Ташкент) **26**; *О. Дранко* (Киев) **42**; *А. Дробышев* (Ленинград) **42**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **27, 29, 42**; *И. Жуков* (Ленинград) **27, 29, 43, 45**; *А. Зеге* (Минск) **28, 45**; *А. Золотых* (Курск) **26, 27, 42**; *И. Зябрев* (Кролевец) **26, 28**; *З. Ибрагимов* (Масаллы) **26, 28**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **42, 44**; *Д. Камунтавичус* (Вильнюс) **42**; *Н. Качан* (д. Якимовка Минской обл.) **26**; *В. Ким* (Бектемир) **26, 27, 42**; *С. Ким* (Бектемир) **26, 42, 45**; *А. Киселев* (Ташкент) **45**; *В. Кисиль* (Одесса) **45**; *В. Козловский* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **26**; *И. Колпаков* (Сочи) **28**; *А. Коньшин* (Ростов-на-Дону) **26, 27, 42**; *И. Корнеева* (Москва) **45**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **42**; *Д. Короткин* (Ленинград) **27, 42—45**; *А. Коротков* (Горький) **45**; *О. Крижановский* (Харьков) **42, 43**; *А. Крушельницкий* (Казань) **26**; *С. Ламихов* (Ташкент) **26—29, 42**; *В. Левин* (Москва) **26**; *Л. Лейцин* (Чернигов) **26, 42, 45**; *В. Лихачев* (Львов) **27, 28**; *О. Малов* (Казань) **45**; *С. Мамедов* (Баку) **26, 29, 42**; *В. Мангазеев* (Кемерово) **26**; *С. Матюшов* (Вологда) **26—29**; *Л. Меркявичус* (Лентварис) **26—29, 42**; *А. Мильман* (Одесса) **26, 28**; *Э. Мирзоян* (Ереван) **26, 29, 42**; *С. Морейно* (Москва) **28, 29**; *Ю. Назаренко* (Киев) **26—29, 42, 45**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **27, 29, 42**; *А. Никонов* (Кировград) **26, 27, 42**; *П. Овчинников* (Вязники) **26, 27, 42**; *М. Окроян* (Ереван) **42**; *К. Пелих* (Павловский Посад) **26—28**; *Н. Пендюрин* (Пенза) **26, 27**; *Г. Перельман* (Ленинград) **26, 28, 42**; *Е. Попов* (Белорецк) **26, 27**; *С. Попов* (с. Эльгай Якутской АССР) **26**; *Ю. Прохоров* (Орехово-Зуево) **26, 28**; *Л. Прядко* **45**; *В. Романюк* (с. Куснище Волынской обл.) **26—28**; *А. Руденский* (Донецк) **42, 45**; *Н. Сайгина* (Саратов) **26, 28**; *Э. Салимов* (Кировабад) **26**; *М. Свердликов* (Новосибирск) **45**; *В. Светлицкий* (Запорожье) **26**; *В. Сидорин* (Реутов) **26**; *А. Сикса* (Киев) **26**; *И. Скрыпник* (Ивано-Франковск) **26**; *А. Слинкин* (Москва) **42**; *А. Смирнов* (Курган) **26, 27, 45**; *А. Сохет* (Харьков) **45**; *А. Спивак* (Стерлитамак) **27—29, 42, 43**; *С. Спичак* (Припять) **28, 29, 43, 45**; *Э. Степанян* (Баку) **26, 28, 42**; *Ю. Талденко* (Сумы) **26, 45**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **26, 27, 29, 42, 45**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **26, 28**; *Н. Федин* (Омск) **26**; *Я. Фельдман* (Киев) **42**; *Д. Фомин* (Ленинград) **42**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **26—28**; *А. Харитонский* (Киев) **43**; *А. Хилков* (Новомосковск) **26, 28**; *А. Хохлов* (Москва) **26, 42**; *В. Цекановский* (Донецк) **26**; *И. Цимох* (Кировоград) **26, 28, 42**; *В. Цолов* (Панагюрище, НРБ) **42**; *О. Чалых* (Витебск) **26, 28, 42**; *В. Шабунин* (п. Хохольский Воронежской обл.) **26, 45**; *С. Шаралов* (Ташкент) **26**; *В. Шах* (с. Замшаны Волынской обл.) **26, 27, 45**; *З. Шибзухов* (Нальчик) **26**; *В. Шириков* (Москва) **42**; *Ю. Школьников* (Киев) **28**; *Л. Элькун* (Ташкент) **26, 28**; *Л. Эпремидзе* (Тбилиси) **42, 43**.

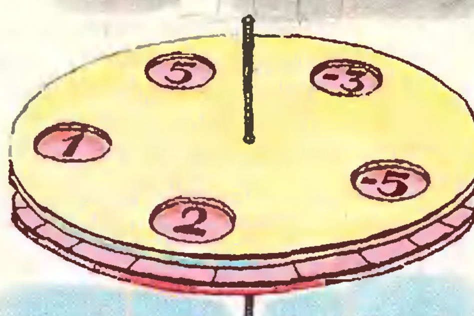
Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф634, Ф647—Ф649, Ф658 и Ф661**. Остальные задачи решили: *В. Абаджев* (Львов) **39—43, 45, 46, 50—52, 60, 62**; *В. Аветисов* (Баку) **42, 43, 46, 50—55, 57, 60, 62**; *И. Аглиуллин* (Москва) **35, 39, 40, 50—53, 57**; *Э. Алиев* (Баку) **42, 52, 57**; *В. Аненков* (Подольск) **52**; *К. Аракелов* (Моздок) **50—52, 57**; *А. Аралкин* (Новокузнецк) **43, 46, 52**; *А. Арбузов* (Чита) **46**; *А. Астахов* (Железнодорожный Московской обл.) **50, 52, 53**; *Н. Афанасьев* (Новороссийск) **52**; *А. Ахметзянов* (Уральск) **39—41, 43, 50—52, 54, 55**; *Э. Багдасарян* (Баку) **50—53**; *А. Баглюк* (Киев) **39, 40, 42, 43, 45, 50—54, 59, 60**; *С. Баталов* (Арзамас) **50—52, 54, 57, 60**; *В. Белоцерковский* (Донецк) **46, 50—54, 57, 60**; *О. Бендер* (Запорожье) **33, 37—42, 54, 55, 57**; *В. Бережной* (Киев) **36**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **43, 45, 46**; *С. Бобровин* (Киев) **57**; *А. Бойко* (п. Ракитное Киевской обл.) **57**; *К. Бураковский* (Варшава, ПНР) **43—45, 54, 57**; *Л. Бураковский* (Киев) **55, 57**; *М. Вакула* (Одесса) **36**; *В. Васильев* (Великие Луки) **43, 50—52, 54, 55, 57, 60**; *В. Васильев* (д. Тобурданово Чув. АССР) **35—37**; *В. Вачев* (Ямбол. НРБ) **33, 43**; *Б. Вейцман* (Одесса) **35—37, 39—42, 44, 46, 50—55, 57, 60**; *Е. Велько* (п. Сахарный Завод Минской обл.) **50—52**; *А. Вернета* (ст. Старошниская Краснодарского кр.) **40, 45, 46, 51, 52, 54, 55, 57, 60**; *А. Ветчинкин* (Москва) **35—37**; *А. Владимиров* (Пущино) **39, 40, 50, 53, 54**; *Ю. Воеводов* (Гомель) **35, 39, 50—52, 55, 57**; *С. Вознюк* (Харьков) **50, 51, 55, 57, 60**; *А. Волков* (п. Палатка Магаданской обл.) **40, 41**; *А. Вольнов* (Киев) **52, 53, 57**; *А. Воробьев* (Тихвин) **54, 57, 60**; *Г. Гаев* (Саратов) **50—52, 60**; *Р. Габдуллин* (Москва) **50—52**; *М. Гапонова* (Горький) **43, 46**; *Е. Гасакова* (п. Ярдымлы Аз. ССР) **52**; *А. Глушков* (Йошкар-Ола) **44, 45**; *А. Голубков* (Щелково) **36, 39, 43, 51, 52**; *С. Горбачевский* (Минск) **57**; *М. Горбунов* (Горький) **50, 52**; *Д. Григорьев* (Москва) **33, 35—42, 53—55, 60, 62**; *И. Губин* (Ереван) **40, 50—52, 60**; *С. Гузов* (Львов) **39**; *И. Гуль* (Дрокия) **50—52**; *В. Гурбич* (Запорожье) **55**; *А. Гутин* (Клинцы) **33, 35—40, 42—46, 50—55, 57, 59, 60, 62**; *И. Дамм* (Черновцы) **35, 40, 43, 46, 50—52, 55, 59, 60, 62**; *В. Дворцевой* (Тамбов) **60, 62**; *П. Демкович* (Краснодар) **52**; *О. Держко* (Омск) **53**; *И. Дмитриев* (Донецк) **33, 39, 46, 50, 52**; *В. Добрецов* (Москва) **36, 40, 42, 43, 52, 57**; *А. Долгополов* (Дрокия) **36, 38, 42, 50, 52, 54, 55, 57**; *С. Дорфман* (Киев) **39, 40, 42, 57**; *С. Евдокимов* (Витебск) **35, 39—41, 46, 52—55, 57, 60, 62**; *И. Елишевич* (Чернигов) **35, 38—41, 43, 51, 52—55, 57, 60**; *В. Житомирский* (Харьков) **52**; *А. Жупинский* (Молодечно) **40**; *В. Зац* (Ташкент) **35**; *Ю. Звегинцев* (Харьков) **33, 35, 37, 39, 50—53, 59, 60, 62**; *М. Зейфман* (Вологда) **33, 35, 36, 39—41, 45, 46, 50—54, 60**; *Э. Зиннурова* (Уфа) **39**; *И. Златогорский* (Саратов) **52, 60**; *В. Зубяк* (Нововолынск) **40**; *В. Кагаловский* (Харьков) **35, 36, 40, 50, 52, 53, 57, 62**; *А. Каледин* (Москва) **51**; *А. Калиниченко* (Сумы) **55, 57**; *С. Калмыков* (Копейск) **52**; *Ю. Канский* (с. Городовка Винницкой обл.) **52**; *А. Каштанов* (Челябинск) **40**; *А. Кечерджян* (Ереван) **43, 52**; *И. Климкович* (с. Чернелица Ивано - Франковской обл.) **46**; *А. Клиновский*

(Окончание см. на с. 58)

Задачи





1. По расписанию поезд из Москвы во Фрунзе отправляется ежедневно в 23 часа 50 минут и находится в пути ровно 75 часов, а поезд из Фрунзе в Москву отправляется ежедневно в 12 часов 50 минут (время московское) и находится в пути (по техническим причинам) 73 часа 28 минут. Состав поезда, прибыв на конечную станцию, отправляется обратно в тот же день. Сколько необходимо сформировать составов, чтобы обеспечить бесперебойную работу маршрута Москва — Фрунзе и обратно?

2. Из трех квадратов: 2×2, 3×3 и 6×6 (см. рисунок) нужно сложить один. Как разрезать эти квадраты, чтобы количество частей было минимальным?

3. Круглый диск разделен на 21 сектор; секторы одинаковы; в каждый из них записано некоторое число. Во втором диске, укрепленном на одной оси с первым, сделано 5 окошечек так, что при любом повороте второго диска из некоторого начального положения на угол, кратный $\frac{2\pi}{21}$, в каждое окошечко видно одно из чисел первого диска. Известно, что при любом таком повороте второго диска сумма видных через окошечки чисел равна нулю. Докажите, что сумма всех чисел, написанных на первом диске, равна нулю.

4. Зоопарк. В каждом из ребусов, изображенных на рисунке, одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Расшифруйте эти ребусы.

Эти задачи нам предложили
Л. Мочалов, В. Произволов, В. Радунский, Н. Розов

и 441 являются квадратными в любой системе счисления с основанием $a>4$.

Предлагаем читателю найти другие такие же числа.

Г. Топадзе

В волшебном мире чисел

В мире чисел нередко встречаются удивительные равенства и соотношения. Мы хотим познакомить читателя с некоторыми из них.

Симметричные произведения

Взгляните на следующие равенства:

$$12\cdot 42=24\cdot 21,$$
$$102\cdot 402=204\cdot 201,$$
$$1002\cdot 4002=2004\cdot 2001,$$
$$10002\cdot 40002=20004\cdot 20001.$$

Замечательная симметрия — не правда ли? Этот ряд равенств можно продолжать — стоит лишь заметить, что

$$(10^n+2)\cdot(4\cdot 10^n+2)=$$
$$=(2\cdot 10^n+4)\cdot(2\cdot 10^n+1).$$

(При $n=1$, 2, 3, 4 получаются наши равенства.)

«Стойкие» квадратные числа

Кто не знает, что 121 — «квадратное число»: оно равно 11^2. Интересно, что это число обладает некоторой «стойкостью» — является квадратным не только в десятичной, но и в любой другой системе счисления, основание которой больше двух.

В самом деле, пусть основание системы счисления равно a и $a>2$:

$$121_a=1\cdot a^2+2\cdot a+1=(a+1)^2,$$

то есть 121_a есть квадрат числа, полученного прибавлением единицы к основанию системы.

А существуют ли другие стойкие квадратные числа? Оказывается, существуют. Например, числа 144 и 441 являются квадратными в любой системе счисления с основанием $a>4$.

Предлагаем читателю найти другие такие же числа.

Возведение в квадрат

Посмотрите, как оригинально можно возвести в квадрат числа 44, 55, 66:

$$\begin{array}{c}44^2\\ \hline 16\\ +1616\\ 16\\ \hline 1936\end{array}\qquad\begin{array}{c}55^2\\ \hline 25\\ +2525\\ 25\\ \hline 3025\end{array}\qquad\begin{array}{c}66^2\\ \hline 36\\ +3636\\ 36\\ \hline 4356\end{array}$$

Подобным же образом можно найти 77^2, 88^2, 99^2. А все здесь упирается в равенство

$$11^2=121=10+101+10.$$

В самом деле, например, для 44^2 имеем

$$44^2=(4\cdot 11)^2=16\cdot 121=$$
$$=16\cdot(10+101+10)=$$
$$=160+1616+160.$$

Полученный результат можно представить в виде вышеприведенной первой записи.

Аналогично, если воспользоваться равенством

$$111^2=12321=$$
$$=100+1010+10101+1010+100,$$

можно установить своеобразный способ возведения в квадрат некоторых трехзначных чисел. Например,

$$555^2=(5\cdot 111)^2=25\cdot 12321=$$
$$=25(100+1010+10101+1010+100)=$$
$$=2500+25250+252525+25250+2500,$$
$$666^2=(6\cdot 111)^2=36\cdot 12321=$$
$$=36(100+1010+10101+1010+100)=$$
$$=3600+36360+363636+36360+3600.$$

На основании полученных равенств можем написать

$$\begin{array}{c}555^2\\ \hline 25\\ 2525\\ +252525\\ 2525\\ 25\\ \hline 308025\end{array}\qquad\begin{array}{c}666^2\\ \hline 36\\ 3636\\ +363636\\ 3636\\ 36\\ \hline 443556\end{array}$$

Этот оригинальный способ можно применить и для нахождения квадратов четырехзначных, пятизначных,... чисел рассмотренного типа.

Н. Берюлева

Интерференция света

Интерференционные картинки всем нам знакомы с детства. Это радужные пятна от пролитого бензина на лужах, яркие цвета мыльных пузырей. Механизм образования разноцветной интерференционной картинки довольно сложен. Ограничимся рассмотрением интерференции на более простых примерах.

В Физическом энциклопедическом словаре читаем: «Интерференция — это усиление или ослабление амплитуды результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами складывающихся в пространстве двух (или нескольких) волн с одинаковыми периодами. Интерференция имеет место для всяких волн независимо от их природы». К этому можно добавить, что интерференционная картинка будет устойчивой, если складывающиеся волны имеют не только одинаковые периоды, но и постоянный (не зависящий от времени) сдвиг фаз. Такие волны называют когерентными.

Вспомним, как объясняется возникновение интерференционной картины при сложении колебаний от двух точечных когерентных источников света. Векторы напряженности $\vec{E}$ электрического поля (так называемые световые векторы) в электромагнитных волнах, излучаемых источниками, могут быть записаны в виде

$$E_1 = A_1 \cos \omega t,$$
$$E_2 = A_2 \cos (\omega t + \varphi_0).$$

Рассмотрим для простоты случай, когда источники света синфазны (сдвиг фаз $\varphi_0 = 0$) и амплитуды колебаний одинаковы ($A_1 = A_2 = A$).

Пусть расстояния от источников S_1 и S_2 до точки наблюдения C в плоскости P равны r_1 и r_2 соответственно (рис. 1). На пути от источников до точки наблюдения волны приобретут разность хода $\Delta r = r_1 - r_2$. В тех точках плоскости P, куда волны приходят в одинаковых фазах (то есть с разностью хода $\Delta r = k\lambda$, где k — любое целое число), они усилят друг друга, и результирующий световой вектор $\vec{E}$ будет колебаться с амплитудой $2A$. В этих точках находятся интерференционные максимумы. Там, куда две волны равной амплитуды придут в противоположных фазах (то есть с разностью хода, равной нечетному числу полуволн: $\Delta r = (2k+1)\lambda/2$), они полностью погасят друг друга. В этих точках находятся интерференционные минимумы, где никаких колебаний нет: $E = 0$ в любой момент времени.

Глаз наблюдателя усредняет картину во времени (при частотах, соответствующих световым колебаниям, глаз «не замечает» колебаний) и реагирует на интенсивность света, пропорциональную среднему значению от квадрата результирующего светового вектора ($\vec{E}^2$).

Что же увидит наблюдатель? Если плоскость наблюдения параллельна линии S_1S_2 (как показано на рисунке 1) и расстояние d между источниками мало по сравнению с расстоянием L до плоскости P,

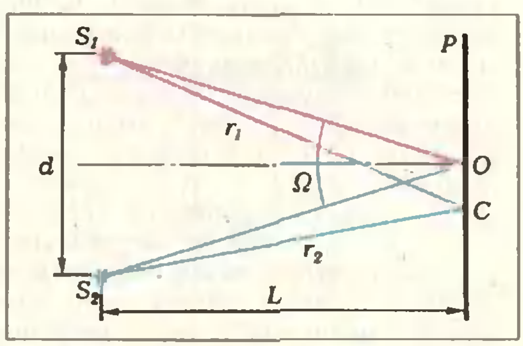


Рис. 1.

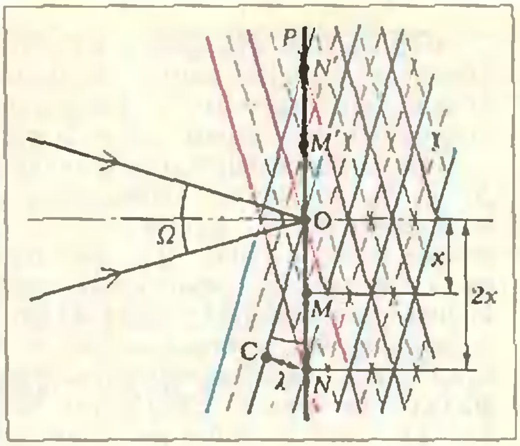


Рис. 2.

интерференционная картина представляет собой систему чередующихся светлых и темных полос. Расположив плоскость наблюдения перпендикулярно к линии S_1S_2, можно увидеть интерференционную картину в виде концентрических колец.

Вернемся к рисунку 1. В точку O волны приходят с разностью хода $\Delta r=0$. Угол $\Omega=d/L$, под которым из точки O (а при $d/L\ll 1$ из любой точки наблюдения) видны источники, называют углом схождения интерферирующих лучей, или углом интерференции. Расстояние между центрами соседних светлых (или темных полос, называют шириной интерференционной полосы. Посмотрим, от чего она зависит.

Задача 1. *Интерферируют две плоские волны. Рассчитайте ширину x интерференционной полосы, если угол схождения волн на экране Ω, а длина волны λ.*

На рисунке 2 изображены положения волновых фронтов в некоторый момент времени. Синие (и красные) сплошные линии соединяют точки, где в этот момент напряженность электрического поля принимает амплитудное значение $E=+A$. Расстояния между соседними сплошными линиями равны λ. Штриховые линии объединяют точки, где напряженность поля $E=-A$.

В точках O, M, N, M', N' и т. д. две волны встречаются в одинаковых фазах. Поскольку фазы колебаний обеих волн одинаково меняются со временем ($\varphi=\omega t+\varphi_0$), в любой момент времени волны будут приходить в эти точки в одинаковых фазах и, следовательно, усиливать друг друга. Точки O, M, N, M', N' соответствуют интерференционным максимумам.

Из рисунка 2 видно, что $\widehat{NOC}=\Omega/2$, $|ON|=2x$ и $|CN|=\lambda$. Из соотношения

$$\frac{\lambda}{2x}=\sin\frac{\Omega}{2}\simeq\frac{\Omega}{2}$$

найдем

$$x=\frac{\lambda}{\Omega}\quad(\text{для малых } \Omega)$$

— ширина интерференционной полосы зависит от длины волны источников и угла схождения. Этот результат справедлив для любой интерференционной схемы с малым углом схождения лучей (при достаточном удалении от источников волны всегда можно считать плоскими). В частности, для точечных источников (см. рис. 1)

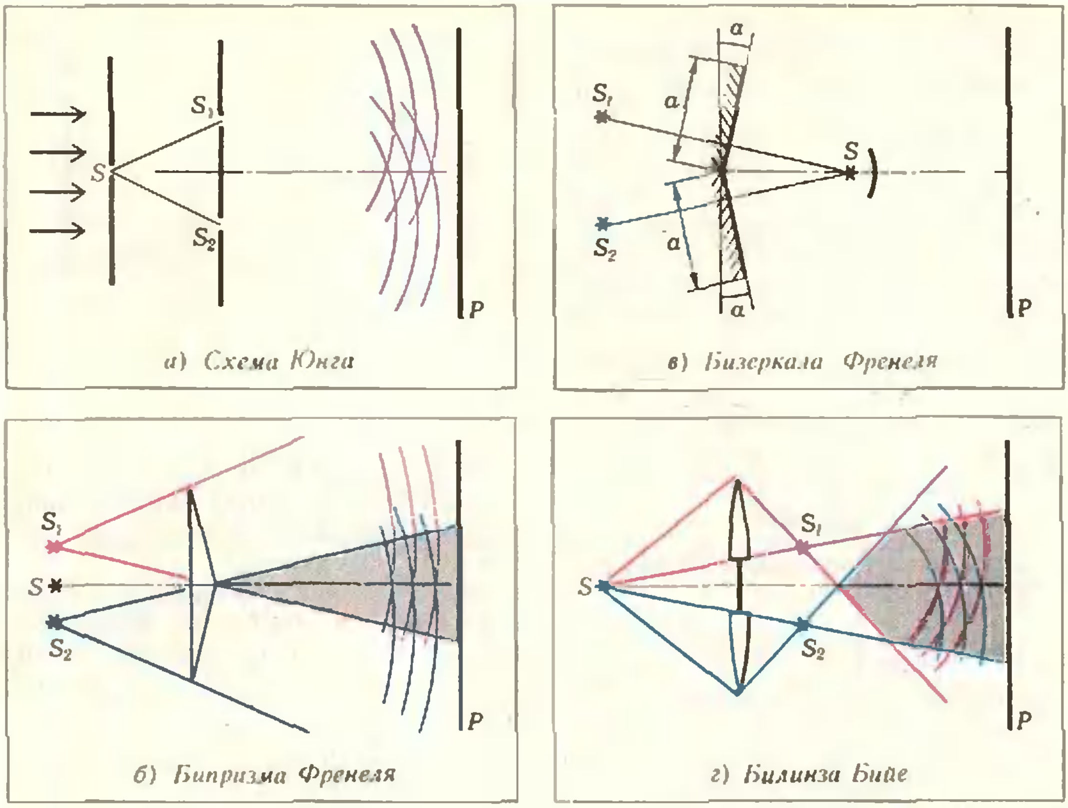
$$\Omega=\frac{d}{L}\text{ и } x=\frac{\lambda}{\Omega}=\frac{\lambda L}{d}.$$

В красном свете ($\lambda\approx 7\cdot 10^{-7}$ м) полосы шире, чем в зеленом ($\lambda\approx 5{,}5\cdot 10^{-7}$ м); с удалением экрана от источников полосы расширяются ($x\sim L$); сближение источников также ведет к уширению полос ($x\sim 1/d$).

Заметим, что два обычных независимых источника не являются когерентными, потому что разность фаз приходящих от них волн не постоянна. Для получения четкой интерференционной картины свет от одного источника делят на два пучка. Это можно сделать, например, с помощью одной из схем, представленных на рисунке 3. Расположив экран там, где пересекаются световые пучки, исходящие из двух источников (или их изображений) S_1 и S_2, можно наблюдать интерференционные полосы.

Вот еще один пример.

Задача 2. *Из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=50$ см и диаметром $D=5$ см вырезана полоса шириной $a=5$ мм, а оставшиеся части сдвинуты вплотную (рис. 4). На расстоянии $d=75$ см от линзы расположен точечный источник света S. Каково*



а) Схема Юнга

в) Бизеркала Френеля

б) Бипризма Френеля

г) Билинза Бийе

Рис. 3.

максимальное число полос в интерференционной картине для длины волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м?

Построим изображение источника S в верхней половине срезанной линзы (рис. 5). Луч SO, параллельный оптической оси, после преломления в верхней части линзы пойдет через ее фокус F_1. Луч SA, преломившись в линзе, должен встретиться с параллельным ему лучом KO_1 в точке M фокальной плоскости линзы (луч KO_1 проходит через оптический центр O_1 верхней половины линзы, не преломляясь).

Пересечение продолжений лучей AM и OF_1 дает положение изображения S_1 источника на расстоянии f от линзы.

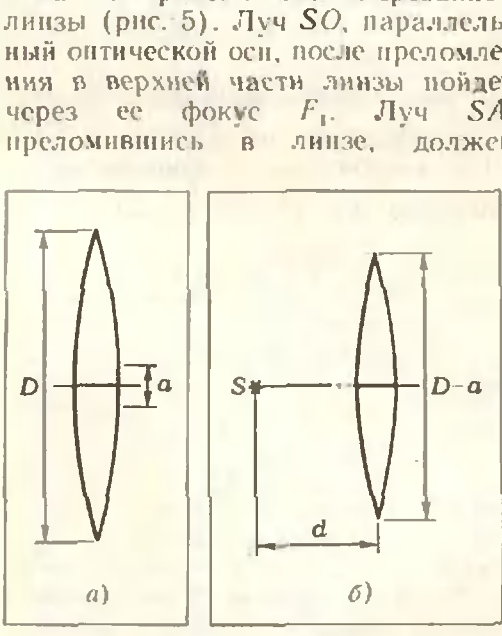


Рис. 4.

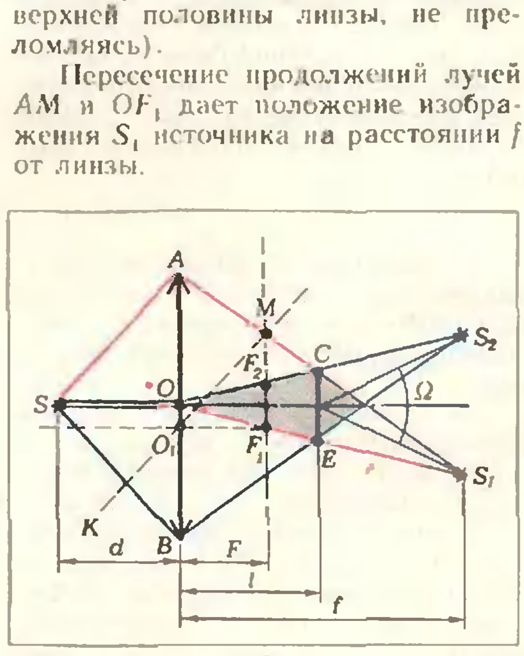


Рис. 5.

Изображение S_2 источника в нижней половине линзы расположено симметрично относительно оси системы.

Из рисунка 5 видно, что в данном случае область перекрытия пучков ограничена и лежит между линзой и точкой пересечения лучей AS_1 и BS_2. На расстоянии l от линзы размер $|CE|$ области перекрытия максимален. Здесь можно наблюдать $N=\frac{|CE|}{x}$ полос, где $x=\frac{\lambda}{\Omega}$ — ширина полосы. Угол схождения $\Omega=\frac{|S_1S_2|}{f-l}$, поэтому

$$N=\frac{|CE|}{\lambda}\frac{|S_1S_2|}{f-l}.$$

Из подобия треугольников F_2F_1O и CEO найдем

$$|CE|=|F_2F_1|\frac{l}{F}=\frac{al}{F},$$

а из подобия треугольников AOC и S_1S_2C —

$$|S_2S_1|=|AO|\frac{f-l}{l}=\frac{D-a}{2}\frac{f-l}{l}.$$

Тогда окончательно

$$N=\frac{|CE|}{\lambda}\frac{|S_1S_2|}{f-l}=\frac{a(D-a)}{2F\lambda}=450 \text{ полос}.$$

С удалением плоскости наблюдения от линзы полосы становятся уже (растет Ω). Ширина области перекрытия до плоскости CE растет, а затем уменьшается и притом быстрее, чем ширина полосы. Поэтому максимальное число полос наблюдается в плоскости CE — самом широком сечении области перекрытия.

* * *

В заключение рассмотрим несколько задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 3 (1980). *От точечного монохроматического источника A отодвигают точечный монохроматический источник B (источники когерентны и синфазны) до тех пор, пока в точке O, где наблюдается интерференция, не наступает потемнение (рис. 6). (Расстояние между A и B при этом равно $d=2$ мм.) Расстояние между источником A и экраном $L=9$ м. На сколько нужно передвинуть экран к источнику A, чтобы в точке O_1 возникло потемнение?*

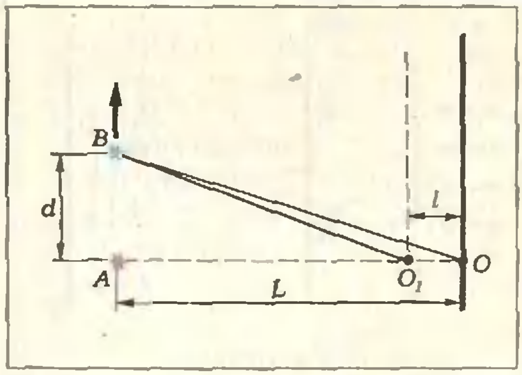


Рис. 6.

При удалении источника B первое потемнение в точке O возникнет при условии, что разность хода волн от B и A равна $1/2$ длины волны:

$$\Delta r=|BO|-|AO|=\frac{\lambda}{2},$$

или

$$\sqrt{L^2+d^2}-L=\frac{\lambda}{2}. \qquad (1)$$

Если экран приблизить к источникам на расстояние l, минимум в точке O_1 будет соответствовать разности хода $3/2$ длины волны:

$$\Delta r_1=|BO_1|-|AO_1|=\frac{3\lambda}{2},$$

или

$$\sqrt{(L-l)^2+d^2}-(L-l)=\frac{3\lambda}{2}. \qquad (2)$$

Преобразуем выражения (1) и (2) и воспользуемся приближенной формулой $(1+x)^{1/2}=1+\frac{x}{2}$ для $x\ll 1$:

$$\sqrt{1+\left(\frac{d}{L}\right)^2}-1=\frac{\lambda}{2L},$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{d}{L-l}\right)^2}-1=\frac{3\lambda}{2(L-l)},$$

или

$$d^2=\lambda L,$$
$$d^2=3\lambda(L-l).$$

Отсюда

$$l=\frac{2}{3}L=6 \text{ м}.$$

Задача 4 (1974). *В интерференционной схеме с зеркалом Ллойда точечный источник S расположен*

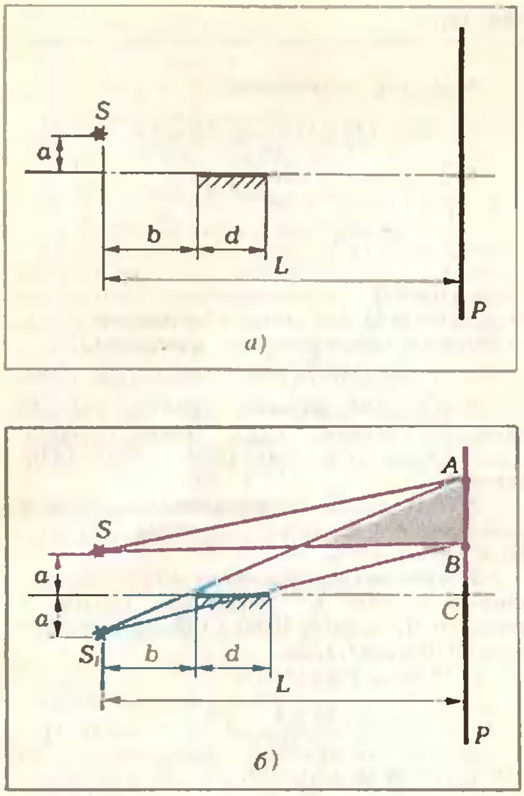


Рис. 7.

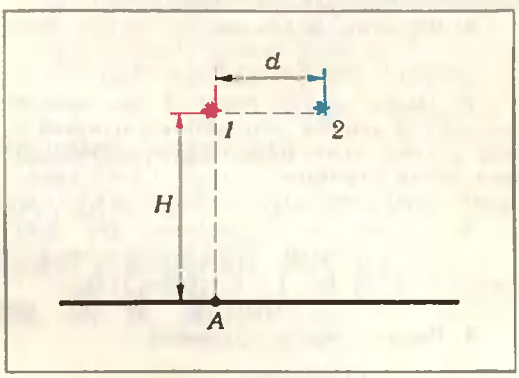


Рис. 8

на расстоянии $b=20$ см по горизонтали от плоского зеркала, на высоте $a=10$ см над плоскостью зеркала (рис. 7, а). Длина зеркала $d=10$ см. На расстоянии $L=1$ м от источника расположен экран P. Определите вертикальный размер интерференционной картины на экране.

Построим изображение S_1 источника S в плоском зеркале (рис. 7, b). Лучи от источника S освещают практически весь экран. Лучи от изображения S_1 (лучи, отраженные от зеркала) перекрываются с лучами от S только в области AB. Введем обозначения: $|AB|=h$, $|AC|=z$; тогда из подобия треугольников найдем

$$\frac{b+d}{a}=\frac{L-b-d}{z-h},$$

$$\frac{b}{a}=\frac{L-b}{z}.$$

Отсюда

$$h=\frac{La/b}{1+b/d}\approx 16{,}7\ \text{см}.$$

Упражнения

1. Два точечных синфазных монохроматических источника расположены на расстоянии d друг от друга (рис. 8). Прямо под источником 1 на расстоянии $H=8$ м наблюдается интерференция. Первый раз потемнение в точке A наблюдается при $d_1=2$ мм. В следующий раз потемнение наступает при расстоянии d_2. Найдите это расстояние.

2. Собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=50$ см и диаметром $D=5$ см разрезали по диаметру пополам и половинки раздвинули на расстояние $a=5$ мм (см. рис. 3, г). Точечный источник света S расположен на расстоянии $d=1$ м от линзы. На каком минимальном расстоянии l от линзы можно наблюдать интерференционную картину? Щель между половинками линзы закрыта.

3. В схеме с бизеркалами Френеля (см. рис. 3, в) два одинаковых плоских зеркала образуют угол $2\alpha=0{,}1$ рад. Точечный источник S находится на биссектрисе угла на расстоянии $d=20$ см от линии пересечения зеркал. При каком минимальном размере зеркал a на удаленном экране P могут наблюдаться интерференционные полосы? Прямые лучи от источника на экран не попадают.

Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет и факультет прикладной математики и механики)

1. Найти уравнение касательной к кривой $y=\frac{x+1}{x}$, если известно, что касательная проходит через точку $M(a, b)$. Сколько существует решений в зависимости от выбора точки $M(a, b)$? Найти эти решения.

2. Каждая из двух троек чисел $\lg a$, $\lg b$, $\lg c$ и $\lg a-\lg 2b$, $\lg 2b-\lg 3c$, $\lg 3c-\lg a$ является арифметической прогрессией. Могут ли числа a, b, c служить длинами сторон треугольника? Если да, то какой это будет треугольник? Найти углы этого треугольника, если он существует.

3. Решить уравнение

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\sqrt{x}}=(2{,}25)^{\sqrt{x}-4}.$$

4. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, где ABC и $A_1B_1C_1$ — правильные треугольники со стороной b, являющиеся соответственно нижним и верхним основаниями этой призмы. На стороне $[BC]$ взята точка K так, что угол $\widehat{KAC}=\alpha$, $\alpha<\frac{\pi}{3}$. Зная, что площадь поверхности призмы равна $\frac{3}{2}a^2$, найти площадь треугольника AKC_1.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через один час после этого из A на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый достиг B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч?

2. На окружности радиуса 10 см дана точка A. На каком расстоянии от точки A нужно провести хорду $[BC]$ параллельно касательной в точке A, так, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(3x+4)>\log_{\frac{1}{3}}(x^2+2).$$

4. Доказать тождество

$$\frac{1}{2}(\cos t+\sqrt{3}\sin t)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-t\right).$$

Вариант 3

(геологический факультет и отделение гидрологии географического факультета)

1. В прямоугольном треугольнике ABC, где $\widehat{C}=30°$, из вершины прямого угла B проведена медиана $[BK]$. Найти площадь треугольника BCK, если длина катета $[AB]$ равна 4 см.

2. Определить коэффициенты квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ так, чтобы его корни были равны p и q.

3. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Определить синусы и косинусы углов AOD, DOC, COB, если косинус угла AOB равен 7/25.

4. Решить неравенство

$$\frac{2x+3}{\varphi'(x)}>0,$$

где $\varphi(x)=\ln(x^2+3x-10)$.

Задачи устного экзамена

Математический факультет и факультет прикладной математики и механики

1. Упростить выражение

$$S=\log_2 3+\log_2 3^3+\log_2 3^5+\ldots+\log_2 3^{801}.$$

2. Через какую точку A на кривой $y=-x^2+2x$ должна проходить касательная к этой кривой, чтобы трапеция, образованная касательной и прямыми $x=0$, $y=0$, $x=1$, имела наименьшую площадь?

3. Пусть $f(x)$ определена при всех $x\neq 0$ и $f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$. Найти $f(2)$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}|x+y|=1,\\ |x|+|y|=1.\end{cases}$$

5. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x}+\sqrt{2x-3}<5.$$

Физический факультет

6. К графику функции $y=\ln x^2$ построить касательную, параллельную прямой $y=-x$.

7. Найти первый член и разность арифметической прогрессии, у которой

$$\begin{cases}a_2+a_5-a_3=10,\\ a_1+a_6=17.\end{cases}$$

8. Через точку A под углом в 30° проведены два луча. На одном из них на расстоянии a от точки A взята точка B. Из нее опущен перпендикуляр на другой луч, из его основания опущен перпендикуляр на $[AB]$ и т. д. Найти длину полученной бесконечной ломаной.

9. Решить неравенство

$$\log_{x-3}(x-4)<2.$$

Геологический и географический факультеты

10. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+4)<2.$$

11. Найти уравнение касательной к кривой $y=x^3$ в точке $x=2$.

12. Определить длины сторон треугольника, если они выражаются целыми числами, образующими арифметическую прогрессию, а периметр треугольника равен 15.

13. Определить знак выражения $\log_3 4-\log_4 3$.

Химический и биолого-почвенный факультеты

14. Решить уравнение

$$x|x|+2x+1=0.$$

15. Упростить выражение

$$(\log_3 4+\log_2 9)^2-(\log_3 4-\log_2 9)^2.$$

16. Найти знак числа $\lg a$, если $a^{100}>a^{90}$.

17. Построить график функции

$$y=(x+1)^3-(x-1)^3.$$

Экономический факультет

18. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника наибольшей площади, вписанного в окружность радиуса R.

19. Найти область определения функции

$$y=\lg(\sqrt{x^2-5x-24}-x-2).$$

20. Найти параллельный перенос, отображающий параболу $y=x^2$ на $y=x^2-6x+11$.

21. Построить график функции

$$y=x|x-3|.$$

О. Ускова

Азербайджанский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Математический факультет

Вариант 1

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построить сечение, проходящее через точки C, M и N, если $M\in[BB_1]$, $|MB|=\frac{1}{3}|BB_1|$, $N\in[AD]$, $|ND|=\frac{1}{3}|AD|$.

2. Решить уравнение

$$\cos 7x-\sin 5x=\sqrt{3}(\cos 5x-\sin 7x).$$

3. Решить неравенство

$$5^{\log_x\frac{8-12x}{x-6}}>25.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-3x+4$ и $y=x+1$.

5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}.$$

Вариант 2

1. В правильной четырехугольной пирамиде центры вписанного и описанного шаров совпадают. Определить двугранный угол при ребре основания пирамиды.

2. Найти множество решений системы

$$\begin{cases}(x+y)\cdot 3^{y-x}=\frac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y.\end{cases}$$

3. Доказать, что если α, β, γ — углы треугольника, то имеет место равенство

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$ на отрезке $[0;2]$.

5. Доказать, что скалярное произведение двух векторов — сторон параллелограмма с общей вершиной — равно четверти разности квадратов диагоналей.

Физический факультет

Вариант 3

1. В конус вписан шар. Поверхность шара относится к площади основания конуса как 4:3. Найти угол при вершине конуса.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}x+2y-z=7,\\ 2x-y+z=2,\\ 3x-5y+2z=-7\end{cases}$$

методом Гаусса.

3. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1.$$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{5}{x}$ и $y=6-x$.

5. Три силы, приложенные к одной точке, образуют попарно углы, равные φ. Найти величину равнодействующей, если величина каждой из данных сил равна F.

Вариант 4

1. Основанием пирамиды служит квадрат; две боковые грани пирамиды перпендикулярны к ее основанию, две другие образуют с основанием угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат на боковых ребрах пирамиды, а четыре другие — на основании пирамиды. Зная, что ребро куба равно a, найти боковую поверхность пирамиды.

2. Числа $5x-y$, $2x+3y$ и $x+2y$ составляют арифметическую прогрессию, а числа $(y+1)^2$, $xy+1$ и $(x-1)^2$ составляют геометрическую прогрессию. Найти x и y.

3. Решить неравенство

$$x-3\sqrt{x-3}-1>0.$$

4. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-6}}{x^2-4}.$$

5. Вычислить предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-x-3}{2x^2+5x+3}.$$

В. Попов,
С. Садыхов

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(специальность «математика» физико-математического факультета)

1. В правильную треугольную пирамиду вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найти объем этой пирамиды, если боковое ребро равно b.

2. Решить неравенство

$$\lg(x-1)+\lg(x-2)<\lg 6.$$

3. Решить уравнение

$$\cos 2x+\cos x+1=0.$$

4. Найти наибольшее значение функции

$$y=(2-x)(x+2).$$

Вариант 2

(специальность «физика и астрономия» физико-математического факультета)

1. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая образует с плоскостью большего основания угол α и равна l. Определить площадь поверхности и объем усеченного конуса.

2. Определить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=3x-x^3$, $y=0$.

3. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2>0.$$

4. Решить уравнение

$$2\cos^2 x+\sin^2 2x=1+\cos^2 2x.$$

Вариант 3

(факультет общетехнических дисциплин)

1. В правильной треугольной усеченной пирамиде ребра нижнего и верхнего оснований соответственно равны a и b $(a>b)$, двугранный угол у ребра нижнего основания равен α. Определить объем усеченной пирамиды и площадь ее поверхности.

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x=\cos x.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{2x^2-3x-459}{x^2+1}>1.$$

4. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-3)(n+5)}{2n^2+3n-2}.$$

Задачи устного экзамена

1. Решить уравнение

а) $\dfrac{\log_5(2x+3)}{1-\log_5(2x+3)}+\dfrac{3}{5-\log_5(2x+3)}=0;$

б) $\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x=-\dfrac{1}{8}.$

2. Решить неравенство

а) $\log_{x^2}(2+x)<1;$

б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)<\dfrac{1}{2};$

в) $2x^2-5|x|+3>0.$

3. Найти предел

а) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+\ldots+\frac{n}{2}}{\frac{n^2}{4}+n+3};$

б) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\cos 4x}{\sin 2x-\cos 2x}.$

4. Исследовать функцию

а) $y=\dfrac{3}{2}\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1;$

б) $y=\dfrac{x^2}{x^2+3}$

и построить ее график.

5. Найти область определения функции

$$y=\log_2\sin x.$$

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2+1$ и касательными, проведенными к этому графику в точках с абсциссами $x=0$ и $x=2$.

7. Написать уравнения касательных к графику функции $y=2x^2-4x$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.

8. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin x\cdot\cos 3x\,dx.$

9. Вычислить $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}.$

10. Что больше $\sin 1980^\circ$ или $\cos 1980^\circ$?

11. Задать формулой функцию, обратную к функции

$$y=\frac{1}{2}(3x-3).$$

12. Какое положительное действительное число a в сумме с обратным к нему числом $\frac{1}{a}$ дает наименьшую сумму?

13. Морская вода содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды необходимо добавить к 80 кг морской, чтобы содержание соли в последней составляло 4%?

14. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого ее членов равно 160. Найти сумму шести первых членов прогрессии.

Физика

Билет устного экзамена на естественных факультетах

1. Сила упругости. Закон Гука.

2. Электромагнитные колебания. Колебательный контур. Превращение энергии в коле-

бательном контуре. Зависимость периода колебаний в контуре от индуктивности и емкости (без математического вывода).

3. Задача. Найдите красную границу фотоэффекта для фотоэлемента, катод которого изготовлен из сплава платины и цезия. Работа выхода электрона $A=2{,}24\cdot10^{-19}$ Дж. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Е. Коршак, С. Левищенко, Н. Лященко

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен
(математический факультет)

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{(\sqrt{a}+1)^2-\dfrac{a-\sqrt{ax}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}}{(\sqrt{a}+1)^3-a\sqrt{a}+2}\right)^{-3}$$

2. Решить неравенство

$$\left|\frac{2x-4}{x+1}\right|>2.$$

3. Решить уравнение

$$(1+\cos 4x)\cdot\sin 2x=\cos^2 2x.$$

4. Исследовать функцию

$$f(x)=\frac{3x}{1+x^2}$$

и построить ее график.

5. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, конгруэнтные стороны которого имеют длину b и составляют угол α. Каждое из боковых ребер пирамиды образует с высотой пирамиды угол φ. Найти объем пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Канал шириной $d=10$ м и глубиной $h=5$ м наполнен водой и перегорожен плотиной. Определите силу давления воды на плотину.

2. Какое количество теплоты выделяется при торможении машины массой $m=2$ т, двигавшейся со скоростью $|\vec{v}|=36$ км/ч?

3. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить до расстояния $d=10$ см два заряженных тела с зарядами $q_1=q_2=q=2{,}0\times\times10^{-8}$ Кл, находящихся на расстоянии $d_0=80$ см?

Н. Ванюшина, Л. Компанийц

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x^2+\frac{7}{2}x+1$, $y=2^{-x}$, $x=2$ $(x<2)$.

2. Решить уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x+\cos x}=1.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{0,3}(x^2+4x-5)>\log_{0,3}(x-1).$$

4. Каждое ребро куба разделено на 3 отрезка равной длины. Доказать, что полученные 24 точки деления принадлежат одной сфере. Вычислить площадь поверхности этой сферы, если длина ребра куба равна a.

5. Известны координаты вершин треугольника ABC: $A(1;1;1)$, $B(2;4;2)$, $C(8;3;3)$. Определить, является ли этот треугольник прямоугольным или тупоугольным.

Вариант 2

(отделение «Физика и астрономия» физического факультета)

1. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии, сумма первых трех членов которой равна 10,5, а разность первого и четвертого членов равна 31,5.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3+6x^2+9x$ на отрезке $[-3;\ 0]$ и построить ее график на этом отрезке.

3. Решить уравнение

$$\sin^2x-3\sin x\cdot\cos x+2\cos^2x=0.$$

4. Дана правильная треугольная пирамида с боковым ребром l. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость, составляющая угол α с плоскостью основания пирамиды. Найти площадь сечения.

Вариант 3

(отделение «Общетехнические дисциплины и труд» физического факультета)

1. Бригада рабочих должна была изготовить 360 деталей. Изготовляя ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на 1 день раньше срока. Сколько дней затратила бригада на выполнение задания?

2. Построить график функции $y=x^3-3x^2+\frac{9}{4}x$.

3. Доказать тождество

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=1.$$

4. Дана правильная четырехугольная пирамида с боковым ребром l. Плоскость сечения проходит через диагональ основания и середину бокового ребра и составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения.

Вариант 4

(географический факультет)

1. Решить уравнение

$$\sin^2 x-3\cos^2 x=1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{2-5x}{x+1}>2.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=-x^2+6x-3$, $y=-x+7$.

4. Боковые ребра треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны и равны a см. Найти объем пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

(математический и физический факультеты)

1. Два груза массами $m_1=3$ кг и $m_2=6{,}8$ кг висят на концах нити, перекинутой через блок. Меньший груз находится на $h=2$ м ниже большего. Грузы пришли в движение без начальной скорости. Через какое время они окажутся на одной высоте?

2. Груз массой $m=10$ кг перемещают равномерно по горизонтальной прямой, прикладывая силу, направленную под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определите модуль этой силы, если коэффициент трения $\mu=0{,}2$.

3. Шарик массой $m=100$ г, подвешенный на нити длиной $l=20$ см, отклонен от положения равновесия на угол $\alpha=60°$. Шарику сообщили скорость $|\vec{v}_0|=2$ м/с в направлении, перпендикулярном к нити. Какова должна быть прочность нити, чтобы шарик при движении не оборвал нить?

4. Когда груз неподвижно висел на вертикальной пружине, ее удлинение было $\Delta l=5$ см. Затем груз оттянули и отпустили, вследствие чего он начал колебаться. Каков период этих колебаний?

5. Льдина постоянной толщины плавает в воде, выдаваясь над поверхностью на $h=2$ см. Какова масса льдины, если ее площадь $S=150$ см^2? Плотность льда $\varrho_л=0{,}92$ г/см^3.

6. Цилиндрический сосуд делится на две части подвижным поршнем. Каково будет равновесное положение поршня, если в одну часть сосуда поместить некоторое весовое количество кислорода, в другую — такое же количество водорода? Общая длина сосуда $l=85$ см.

7. Для нагревания некоторой массы воды от $t_0=0°$C до температуры кипения на электрическом нагревателе потребовалось $\tau_1=15$ мин. После этого потребовалось $\tau_2=1$ ч 20 мин для обращения всей этой воды в пар при тех же условиях. Определите по этим данным удельную теплоту парообразования воды.

8. Во сколько раз изменится мощность, выделяемая в проводнике сопротивлением $R_1=6$ Ом, если параллельно ему подключить второй проводник сопротивлением $R_2=9$ Ом? Внутреннее сопротивление источника $r=4$ Ом.

9. Найдите внутреннее сопротивление генератора, если известно, что мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при двух значениях сопротивления внешней цепи: $R_1=5$ Ом и $R_2=0{,}2$ Ом.

10. Линза дает трехкратное увеличение предмета, находящегося на расстоянии $d=10$ см от ее плоскости. Найдите фокусное расстояние линзы.

Е. Веретенникова, О. Овчинников

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского

(физико-математический факультет)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти боковую поверхность правильной треугольной призмы высоты h, если прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом 60°.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sqrt{x(10-x)}$ на области ее определения.

3. Доказать, что выражение

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}$$

не принимает отрицательных значений.

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x)>\log_{\frac{1}{2}}(2x-2).$$

Вариант 2

1. В шар вписан конус, образующая которого конгруэнтна диаметру основания. Найти отношение полной поверхности этого конуса к поверхности шара.

2. Найти промежутки монотонности функции

$$y=\frac{x-1}{x^2}.$$

3. Найти значение выражения

$$\frac{1-2\cos^2(\alpha-2\pi)}{\sin(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}-\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin\frac{3\pi}{2}.$$

4. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7n^2-3}{\sqrt{n^4+5}}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Как изменится период колебаний маятника при перенесении его с Земли на Марс, если масса Марса в 9,3 раза меньше массы Земли, а радиус Марса в 1,9 раза меньше радиуса Земли?

2. Высота льдины над уровнем океана составляет $h=2$ м. Определите толщину всей льдины, если плотность льда равна $\varrho_1=900$ кг/м³, а океанской воды — $\varrho_2=1050$ кг/м³.

3. Два сосуда объемом $V_1=60$ л и $V_2=30$ л соответственно содержат газ при одной и той же температуре, но при разных давлениях. После соединения сосудов в них установилось давление $p=1000$ кПа. Каким было начальное давление в большом сосуде, если в меньшем оно составляло $p_2=800$ кПа? Температура не менялась.

4. Виток, охватывающий площадку площадью $S=2$ см², расположен перпендикулярно к линиям однородного магнитного поля. Какая ЭДС индуцируется в витке, если магнитная индукция равномерно убывает от $|\vec{B}_1|=0{,}5$ Тл до $|\vec{B}_2|=0{,}1$ Тл за время $\Delta t=0{,}05$ с?

5. Какова наибольшая длина волны света, при которой еще наблюдается фотоэффект, если работа выхода электрона из металла $A=3{,}3\cdot10^{-19}$ Дж?

А. Квитко

Волгоградский политехнический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В шар вписана правильная треугольная пирамида, стороны основания которой равны a, боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти поверхность шара.

2. Решить неравенство $f'(x)+g'(x)<0$, где $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-3}$, $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

3. Упростить выражение

$$\frac{4\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}^2\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}^2\left(2\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}$$

4. Решить уравнение

$$\log_2(9^{x-1}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1).$$

5. Треугольник ABC, у которого $\hat{B}=60°$, вписан в окружность с центром O и радиусом 2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{OA}$ и $\vec{OC}$.

Вариант 2

1. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая равна l и составляет с плоскостью основания острый угол α. Найти боковую поверхность усеченного конуса.

2. Исследовать на экстремум функцию

$$y=x\cdot e^{x+1}.$$

3. Решить уравнение

$$\sin^2 2x+\sin^2 3x=1.$$

4. Решить неравенство

$$\log_{0,3}\log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0.$$

5. Тело падает по закону $h(t)=4+8t-5t^2$, где h — высота падения в метрах, t — время в секундах. Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шофер автомобиля резко затормозил при скорости $|\vec{v}|=72$ км/ч. Через какое время τ автомобиль остановится, если коэффициент трения $\mu=0{,}6$? Каким будет тормозной путь l автомобиля?

2. Два тела брошены вертикально вверх с различными начальными скоростями. Первое тело достигло вчетверо большей высоты, чем второе. Во сколько раз его начальная скорость $|\vec{v}_1|$ была больше начальной скорости $|\vec{v}_2|$ второго тела?

3. Определите массу M Солнца, зная, что средняя линейная скорость Земли на орбите $V=30$ км/с, а радиус орбиты Земли $R=1{,}5\cdot10^8$ км. Гравитационная постоянная $G=6{,}7\cdot10^{-11}$ Н·м²/кг².

4. Бревно длиной $l=3{,}5$ м и диаметром $d=0{,}3$ м плавает в воде. Какова масса M человека, который может стоять на бревне, не замочив ног? Плотность дерева $\varrho=0{,}7\times10^3$ кг/м³.

5. В идеальной тепловой машине газ отдал холодильнику 67% теплоты, полученной от нагревателя. Определите температуру T_2 холодильника, если температура нагревателя $T_1=430$ К.

6. Какой силы ток течет в цепи электрического кипятильника, если объем $V=5$ л воды закипает в течение $\tau=30$ мин? Начальная температура воды $t_1=20$°C, напряжение в сети $U=220$ В, КПД кипятильника $\eta=80\%$, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\times10^3$ Дж/(кг·К).

7. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает за $\tau_1=10$ мин, при включении другой — за $\tau_2=20$ мин. Через какое время закипит вода в чайнике, если включить обе обмотки: а) последовательно, б) параллельно?

8. Самолет летит горизонтально со скоростью $|\vec{v}|=900$ км/ч. Определите ЭДС индукции $\mathcal{E}$, возникающую на концах крыльев самолета, если их размах $l=24$ м, а модуль вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли $B_в=5\cdot10^{-5}$ Тл.

9. Как изменится период колебаний маятника при перенесении его с Земли на Луну? Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а радиус Земли в 3,7 раза больше радиуса Луны.

10. Точечный источник света находится в воде на глубине $h=1$ м. Показатель преломления воды $n=4/3$. Какого радиуса R непрозрачный круг должен плавать над источником на поверхности воды, чтобы источник света сверху был невидим?

Л. Передунова,
В. Пугачев

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(радиофизический факультет и факультет автоматизации управления)

1. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x-1=\frac{\cos 2x}{1+\operatorname{tg} x}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3(\log_2 x)^2-9(\log_2 x)-1}=5.$$

3. Найти площадь фигуры, которая ограничена кривыми $y=1-\frac{1}{x^2}$ и $y=\frac{1}{16}(x^2-1)$ и лежит в правой полуплоскости.

4. Из вершины A равностороннего треугольника ABC проведен луч, пересекающий сторону BC, и на нем выбрана некоторая точка M. Известно, что $\widehat{AMB}=20°$ и $\widehat{AMC}=30°$. Найти $\widehat{MAB}$. Показать, что этот угол содержит целое число градусов.

Вариант 2

(физико-механический факультет)

1. Решить уравнение

$$\lg\frac{x-1}{7x+15}=\lg\frac{3}{16}+\lg\frac{x-4}{x-1}.$$

2. Решить неравенство

$$25^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}+5^{\sqrt{x}+1}>250.$$

3. Углы α_1, α_2, α_3 лежат в первой четверти и образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{12}$, а их тангенсы $\operatorname{tg}\alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2$, $\operatorname{tg}\alpha_3$ образуют геометрическую прогрессию. Найти эти углы.

4. Две касательные к графику функции $y=\sqrt{17(x^2+1)}$ пересекаются под прямым углом в некоторой точке на оси Oy. Написать их уравнения.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Невесомая упругая нить AB длиной $l=1$ м закреплена верхним концом в точке A (рис. 1). Из точки A без начальной скорости падает небольшая муфта массой $m=50$ г. Дойдя до упора B, муфта начала растягивать нить. Найдите коэффициент упругости нити k, если к моменту остановки муфты нить удлинилась на $\Delta l=0{,}2$ м. Трением пренебрегаем.

2. К потолку лифта, поднимающегося с ускорением $|\vec{a}|=1{,}2$ м/с^2, прикреплен динамометр. К динамометру подвешен блок, свободно вращающийся вокруг горизонтальной оси. Через блок перекинута нить, к концам которой прикреплены грузы массами $m_1=200$ г и $m_2=300$ г. Определите показание динамометра. Массой блока можно пренебречь.

3. Одноатомный газ, находящийся при постоянном давлении $p=2\cdot10^6$ Па в цилиндре под поршнем сечением $S=160$ см^2, нагревается так, что поршень перемещается на расстояние $\Delta h=15$ см. Найдите количество теплоты Q, сообщенное газу в этом процессе.

4. Одноатомный идеальный газ при давлении $p_1=3\cdot10^5$ Па и температуре $t_1=0°$C занимает объем $V_1=2$ м^3. Газ сжимают без теплообмена с окружающей средой, совершая при этом работу $A=35$ кДж. Найдите конечную температуру газа T_2.

5. Электрон пролетает между пластинами плоского конденсатора. Длина пластин $l=10$ см, напряженность электрического поля в конденсаторе $|\vec{E}|=4\cdot10^4$ В/м. Какова первоначальная энергия W_0 электрона, если он влетел и вылетел из конденсатора под одним и тем же (по модулю) углом $\alpha=30°$ относительно плоскости симметрии? Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

6. Плоский конденсатор, пространство между пластинами которого заполнено керосином ($\varepsilon=2$), расположен вертикально, заряжен и отключен от источника напряжения. Напряженность электрического поля при этом в керосине $|\vec{E}|=20$ кВ/см. Из-за дефекта в изоляции керосин начинает вытекать, а его место занимает воздух. Предельная напряженность электрического поля в воздухе, при которой наступает электрический пробой (разряд), $|\vec{E}_{пр}|=30$ кВ/см. Какая доля керосина δ вытечет из конденсатора к моменту пробоя конденсатора?

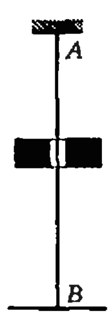


Рис. 1

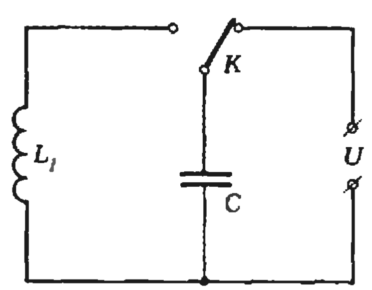


Рис. 2.

7. Электрон, обладающий энергией $W = 10^3$ эВ, влетает в однородное электрическое поле напряженностью $|\vec{E}| = 800$ В/см под углом $\alpha = \pi/2$ к силовым линиям поля. Каковы должны быть направление и величина индукции магнитного поля, чтобы электрон не испытывал отклонения от прямолинейного движения? Масса электрона $m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг.

8. После зарядки конденсатора емкостью C от источника постоянного напряжения U, ключ K переключают на катушку индуктивностью L_1 (рис. 2). В контуре возникают гармонические колебания с амплитудой тока $I_{м1}$. Опыт повторяют по прежней схеме, заменив катушку на другую, индуктивностью $L_2 = 2L_1$. Найдите амплитуду тока $I_{м2}$ для второго случая.

9. Точечный источник света помещен на оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см на расстоянии $d_1 = 120$ см от нее. По другую сторону линзы в ее фокальной плоскости помещена рассеивающая линза. Чему равно фокусное расстояние F_2 рассеивающей линзы, если лучи после прохождения второй линзы кажутся исходящими из самого источника?

10. Одна из пластин плоского конденсатора с расстоянием между пластинами $d = 10$ мм освещается рентгеновскими лучами, вырывающими из нее фотоэлектроны. Полагаем, что скорости этих электронов одинаковы по абсолютной величине и равны $|\vec{v}| = 10^6$ м/с. Электроны собираются на второй пластине. С каждого квадратного сантиметра (S_1) облучаемой пластины в одну секунду вырывается $n = 10^{13}$ электронов. Через какое время t прекратится фототок? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ Ф/м.

А. Бакаев, С. Преображенский

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{c+a}$, $\frac{1}{a+b}$ также образуют арифметическую прогрессию.

2. Построить график функции
$$y = |x-1| + |x-2| + x.$$

3. Решить уравнение
$$5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}.$$

4. Решить систему
$$\begin{cases} (3x+y)^{x-y} = 9, \\ \sqrt[x-y]{324} = 18x^2 + 12xy + 2y^2. \end{cases}$$

5. Решить неравенство
$$\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 4x > 1.$$

6. Доказать тождество
$$\sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 2\alpha - \frac{1}{16}\cos 4\alpha + \frac{1}{32}\cos 6\alpha.$$

7. Найти предел
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{x - \frac{\pi}{2}}.$$

8. Через начало координат провести прямую, делящую криволинейный треугольник с вершиной в начале координат, ограниченный линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = 1$, на две равновеликие части.

9. Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол боковой грани при вершине равен α. Найти высоту пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Небольшое тело соскальзывает с вершины сферы радиусом R. На какой высоте от вершины тело оторвется от поверхности сферы? Трением пренебречь.

2. Люстра массой $m = 100$ кг подвешена к потолку на металлической цепи длиной $l = 5$ м. Определите высоту, на которую можно отклонить люстру, чтобы при последующих качаниях цепь не оборвалась. Известно, что разрыв цепи наступает при натяжении $T = 1960$ Н.

3. Полусферическая чашка радиусом R вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω (рис. 1). В чашке находится шарик массой m, вращающийся вместе с нею. Найдите угол φ, определяющий равновесное положение шарика в чашке.

4. Падающим с высоты $h = 1{,}2$ м грузом забивают сваю, которая от удара уходит в землю на $s = 2$ см. Определите среднюю силу удара и его продолжительность, если масса груза $M = 5 \cdot 10^2$ кг, а масса сваи много меньше массы груза.

5. Стержень AB опирается на шероховатый пол и гладкий выступ C (рис. 2). Расстояние $|AC| = 0{,}75|AB|$. При каком коэффициенте трения стержень будет составлять угол $\alpha = 45°$ с полом в положении равновесия?

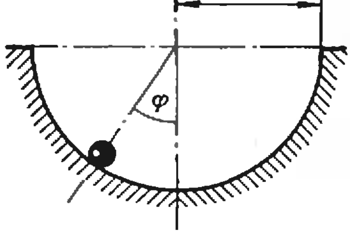


Рис. 1.

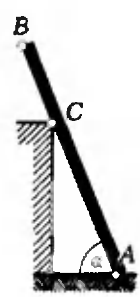


Рис. 2.

6. Какие силы надо приложить к концам стального стержня с площадью поперечного сечения $S=10$ см^2, чтобы не дать ему расшириться при нагревании от $t_1=0°C$ до $t_2=30°C$? Модуль упругости стали $E=21\cdot10^{10}$ Н/м^2; температурный коэффициент линейного расширения стали $\alpha=1{,}2\cdot10^{-5}$К$^{-1}$.

7. В каждой вершине квадрата находится заряд $+q$. Какой величины отрицательный заряд следует поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов находилась в равновесии?

Ю. Мещеряков,
В. Смирнов

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 41)

(Архангельск) **55, 57**; *А. Коган* (Одесса) **35—37, 39—43, 46, 50—52, 54, 55, 60**; *В. Козий* (Винница) **46, 50—52**; *С. Козлов* (Москва) **33, 35, 36, 38—41, 43—46, 50—54, 57**; *Ю. Кокшаров* (Мытищи) **39, 40**; *А. Колчин* (Алма-Ата) **39, 45**; *В. Комов* (Александров) **33, 35, 38—44, 51—55, 60, 62**; *И. Компанейцев* (Алма-Ата) **33, 35, 36, 39—43, 50—52, 55, 62**; *В. Коробов* (Кировград) **39, 41**; *А. Костюковский* (Харьков) **35, 36, 52, 57**; *А. Крушельницкий* (Казань) **46**; *Д. Кубанов* (Москва) **39, 40, 42**; *А. Кубышкин* (Киев) **33, 39, 44, 53, 55, 57, 59, 60**; *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) **40, 45, 51**; *С. Кудрявцев* (Магадан) **35, 40, 41, 46, 50—55, 62**; *А. Кулыгин* (Москва) **52**; *Л. Кучук* (Минск) **46, 52**; *И. Лисовский* (Минск) **39, 51, 52, 60, 62**; *Ю. Логвин* (Лида) **36, 50—52**; *И. Лукьянчук* (Киев) **39, 40, 46, 50—52, 54, 60**; *А. Ляпин* (Москва) **35, 36, 39—46, 50—53, 55**; *Е. Маенкова* (Буденновск) **35**; *И. Мандриченко* (Киев) **39, 40, 45, 46, 60**; *Д. Мансуров* (Акстафа) **57**; *А. Мильман* (Одесса) **38—41, 43—46, 52**; *Л. Мильман* (Минск) **50—52**; *А. Митько* (Гомель) **35**; *С. Михайловский* (с. Концегорье Архангельской обл.) **35, 43, 44, 46, 52, 54, 55**; *С. Мокроусов* (Ленинград) **52**; *Д. Мункин* (с. Кижинга Бур. АССР) **40**; *А. Мушинский* (Минск) **54**; *В. Мытинский* (Чудово) **35, 39**; *А. Найден* (Берлин, ГДР) **35, 39—41**; *М. Найговзин* (Баку) **51—55, 57**; *С. Нестеренко* (Красноярск) **50—52, 57**; *С. Обогуев* (Ленинград) **52, 54, 57**; *С. Одинцова* (Киев) **35, 39, 52**; *А. Осипов* (Сосновый Бор) **33, 36—39, 41, 43—46, 50—52, 54, 57**; *И. Осовяк* (с. В. Дедеркалы Тернопольской обл.) **41**; *Ю. Остапчук* (Здолбунов) **40, 52, 57**; *А. Охапкин* (Львов) **52**; *Ю. Павлов* (Ленинград) **46, 50—52**; *А. Павлычев* (Рига) **33, 35, 38, 39, 42, 52**; *С. Пащенко* (Киев) **46, 51—52**; *А. Пелех* (Казатин) **35, 38, 40, 46, 51, 52**; *В. Пентегов* (Киев) **35—37, 50, 60, 62**; *И. Полюбин* (Иваново) **62**; *Е. Поляков* (Калининград Московской обл.) **50—52**; *В. Поникаров* (Куйбышев) **57**; *А. Пономаренко* (Киев) **40**; *В. Прилипко* (Киев) **35, 37, 50—52**; *К. Прозоров* (Дмитров) **35, 40**; *Л. Прядко* (п/п 42655) **50, 51, 53, 55, 57**; *Е. Розман* (Киев) **35, 36, 46, 52**; *В. Рублев* (Киев) **36**; *С. Рулев* (Краматорск) **46, 50—55, 57, 60, 62**; *А. Салтанов* (Новополоцк) **51, 52, 57, 60**; *А. Санжур* (Киев) **33, 35, 40, 43, 46, 50—54, 57, 60**; *А. Сафонов* (Барнаул) **52**; *А. Середа* (Донецк) **33, 52, 57**; *А. Сидоренков* (Смоленск) **38, 39, 52**; *В. Сидорин* (Реутов) **40, 52**; *А. Смирнов* (Курган) **37, 39, 41, 50—53, 55, 60, 62**; *И. Смоляренко* (Минск) **36**; *А. Сокол* (п. Черноголовка Московской обл.) **35, 43, 45, 50—52, 54, 55, 57, 59, 60, 62**; *И. Соловей* (Донецк) **36**; *А. Сохет* (Харьков) **52**; *Д. Степанов* (Арзамас) **35**; *С. Стрелецкий* (Львов) **59, 60**; *Л. Стрешинский* (Донецк) **50—52**; *К. Табуллин* (Москва) **53—55, 57**; *Ю. Талденко* (Сумы) **33, 38—41, 43, 45, 50, 52, 54, 55, 57, 59, 60, 62**; *А. Теленков* (Брянск) **52**; *А. Тимченко* (Одесса) **43, 46, 50, 52, 53, 55**; *А. Тищенко* (Днепропетровск) **50—54, 60, 62**; *Г. Трунов* (Москва) **60**; *В. Усачев* (Ромны) **40, 50, 57**; *Н. Федин* (Омск) **35, 36, 38—46, 50, 52, 54, 55, 57, 60, 62**; *В. Федюкович* (Киев) **45, 46**; *Н. Фесун* (Золотоношский р-н Черкасской обл.) **36, 57**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **35, 50, 52, 53, 57**; *К. Франкевич* (Могилев) **39**; *М. Фридман* (Львов) **39, 41, 42, 52, 57, 59, 60**; *А. Фролов* (Тула) **35, 39—42, 45, 46, 50, 51, 53, 54, 59, 60, 62**; *С. Фролов* (Москва) **35—37, 39, 46, 51, 52, 54, 57, 62**; *С. Хабарова* (с. Городковка Винницкой обл.) **52**; *А. Цехинский* (п. Запрудня Московской обл.) **33, 35, 37—40, 42—46, 50—52, 54, 55, 59, 60, 62**; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н Тат. АССР) **33, 35, 36, 39, 40, 42, 43, 45**; *А. Чернявский* (п/о Людвиново Минской обл.) **52**; *О. Чумаченко* (Одесса) **52**; *И. Чуприн* (Долгопрудный) **46**; *А. Шакун* (Олайне) **40—42**; *Я. Шапиро* (Ворошиловград) **38, 39**; *В. Шаповал* (Винница) **41, 51, 52**; *А. Шапоренко* (Орск) **39**; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **33, 40, 41, 51, 52**; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **33, 40, 41, 51, 52**; *О. Шевченко* (Мелитополь) **39, 40**; *В. Шелудько* (Днепропетровск) **52, 54, 55, 60**; *И. Шкрадюк* (Ногинск) **44, 45, 51, 52**; *С. Шмаков* (Саратов) **35, 39—43, 50—52**; *И. Шугин* (с. Степногорск Целиноградской обл.) **39, 40, 43**; *Д. Щелканов* (Саратов) **60**; *В. Яковлев* (Москва) **35, 36, 41, 43—45, 50—52, 54, 55, 57**; *К. Яковлев* (Киев) **43, 51, 52, 54, 55**; *М. Ярешенко* (Фрязино) **35, 39—41**.

Международные математические соревнования школьников

В 1980 году Международная математическая олимпиада школьников не проводилась. Однако были проведены два международных соревнования. Одно из них проходило в г. Марианхамина (Финляндия), а другое — в г. Мерш (Люксембург). Соревнования проходили почти одновременно: 1 и 2 июля в Финляндии и 10 и 11 июля в Люксембурге. Регламент соревнований был таким же, как и на Международной математической олимпиаде: работа участников проходит два дня по 4 часа, по 3 задачи в день, команда каждой страны состоит из 8 человек. В соревнованиях приняли участие: в Финляндии — Великобритания, Венгрия, Финляндия, Швеция; в Люксембурге — Бельгия, Великобритания (вторая команда), Люксембург, Нидерланды, Югославия. Команды Беольгии и Югославии состояли из 3 и 7 человек соответственно.

Результаты соревнований были невысокими. В Финляндии лучший результат был 28 очков из 40, и лишь 15 участников набрали больше 10 очков (при 32 участниках). В Люксембурге результаты были выше (правда, и задачи там были легче). Лучший результат был у голландского школьника Карельяна Шутенса (37 очков), 19 участников (из 34) набрали больше 20 очков.

Вот задачи этих соревнований:

Финляндия

Первый день

1. В треугольнике ABC срединные перпендикуляры к сторонам AB и AC пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно.

Доказать, что для того, чтобы $|BC|=|XY|$, достаточно, чтобы $\operatorname{tg}\hat{B}\cdot\operatorname{tg}\hat{C}=3$. Доказать, что это условие не является необходимым, и найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы $|BC|=|XY|$. (6 очков)

2. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определена соотношениями $a_0=1/2$, $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2$. Доказать, что $1-\frac{1}{n}<a_n<1$. (7 очков)

3. Рассмотрим уравнение $x^n+1=y^{n+1}$, где n — натуральное число, большее 1. Доказать, что не существует натуральных решений этого уравнения x и y, для которых x и $n+1$ не имеют общих делителей. (7 очков)

Второй день

4. Выпуклый $2n$-угольник вписан в окружность. Известно, что $n-1$ пара противоположных сторон многоугольника параллельна. Для каких значений n оставшиеся две стороны также параллельны? (6 очков)

5. Горизонтальная прямая называется треугольной для кривой, заданной уравнением $y=x^4+px^3+qx^2+rx+s$, если она пересекает ее в четырех различных точках A, B, C и D (в этом порядке) и из отрезков AB, AC и AD можно составить треугольник.

Доказать, что либо все горизонтальные прямые, пересекающие эту кривую в четырех различных точках, являются треугольными для нее, либо ни одна из них не является треугольной. (7 очков)

6. Найти первый десятичный знак перед запятой и первый десятичный знак после запятой в десятичной записи числа $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{1980}$. (7 очков)

Люксембург

Первый день

1. Найти функцию $f: \mathbf{Q}\to\mathbf{Q}$, удовлетворяющую следующим условиям: $f(1)=2$, $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$ для всех $x, y\in\mathbf{Q}$ (6 очков)

2. На отрезке AC выбрана точка B. На отрезках AB, BC и AC, как на диаметрах, в одну сторону от прямой AC построены полуокружности. Через точку B проводится общая касательная к первым двум полуокружностям, пересекающая третью полуокружность в точке E, а точки K и P являются точками касания второй общей касательной к этим двум полуокружностям. Выразить величину отношения площадей треугольников EPK и EAC через радиусы этих полуокружностей. (7 очков)

3. Пусть p — простое число, а n — целое положительное число. Докажите, что следующие два утверждения эквивалентны:

а) Ни один из биномиальных коэффициентов $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ не делится на p.

б) Число n может быть представлено в виде $n=p^sq-1$, где s и q — целые числа, $s\geqslant 0$, $0<q<p$. (7 очков)

Второй день

4. Две окружности касаются в точке P (внешним или внутренним образом). Прямая, касающаяся одной из окружностей в точке A, пересекает другую окружность в точках B и C. Доказать, что прямая PA делит пополам угол между прямыми PB и PC. (6 очков)

5. Десять игроков начинают играть в кости, имея по одинаковому количеству денег. Каждый по очереди бросает пять игральных костей, затем он платит каждому $\frac{1}{n}$ от того количества денег, которое тот имеет в это время, где n — сумма числа очков, выпавших на всех пяти костях. Когда кости бросил десятый игрок, то на них выпало 12 очков и, после раздачи денег, у каждого оказалась та же сумма, с которой он начинал игру.

Определите, если возможно, количество очков при каждом бросании. (7 очков)

6. Найти все пары $(x; y)$ целых чисел, удовлетворяющих уравнению

$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8(x^2+xy+y^2+1)$. (7 очков)

А. Савин

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Первый советский чемпион мира

В «Кванте», 1980, № 9 мы информировали вас о четвертьфинальных матчах претендентов на первенство мира. В полуфинале Р. Хюбнер победил Л. Портиша (6,5:4,5), а В. Корчной — Л. Полугаевского (7,5:6,5). Дальнейшие события трудно было предугадать — за час до доигрывания девятой и десятой партий финального матча, проигрывая со счетом всего 3,5:4,5, Хюбнер сдал матч. Повторилась история десятилетней давности, когда в претендентском матче с Т. Петросяном после первого же поражения Хюбнер прекратил сопротивление. С такими нервами трудно бороться за шахматную корону.

Итак, очередной цикл борьбы за мировое первенство подошел к концу. Нам же к началу поединка А. Карпова с В. Корчным нужно успеть закончить рассказ о предыдущих матчах на первенство мира.

В середине сороковых годов Михаил Ботвинник вел переговоры с А. Алехиным о матче за мировую корону. Однако смерть Алехина лишила шахматный мир интереснейшего сражения. Впервые шахматный мир остался без чемпиона, и в 1948 году был проведен матч-турнир пяти сильнейших гроссмейстеров, в котором участвовали М. Ботвинник, П. Керес, С. Решевский, В. Смыслов и М. Эйве. Убедительно, с отрывом в три очка победил М. Ботвинник. Он и стал шестым по счету и первым советским чемпионом мира.

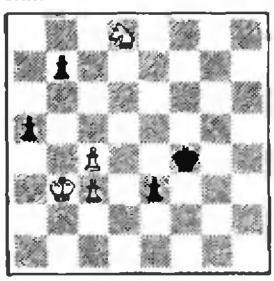
Следующая партия состоялась в десятом туре. В случае победы Керес догонял Ботвинника и делил с ним лидерство. Однако будущий чемпион одержал эффектную победу и отбросил далеко назад одного из основных своих конкурентов.

Ботвинник — Керес

21.Л:g7+! **Кр:g7** **22.Kh5+** **Крg6** **23.Фe3. Черные сдались** (мат неизбежен).

Завоевав титул сильнейшего шахматиста мира, Ботвинник на три года оставил шахматы, целиком посвятив себя науке. За это время он завершил работу над докторской диссертацией в области энергетики и сразу после матча с Бронштейном защитил ее. «Измена» шахматам могла дорого обойтись чемпиону. В первом матче за мировое первенство, проведенном под контролем ФИДЕ (1951 г.), гроссмейстер Д. Бронштейн играл прекрасно, ни в чем не уступал сопернику, и ему не хватило лишь немного счастья, чтобы взойти на трон. Матч закончился вничью (12:12).

Эпизод из шестой партии матча иллюстрирует необычную геометрию шахматной доски.



Бронштейн — Ботвинник

В этой позиции Бронштейн легко делал ничью путем 57.Кe6+ и 58.Kd4, но на всякий случай он решил подтянуть короля к опасной пешке и сыграл **57.Крc2.** Конечно, гроссмейстер видел возможность появления черного короля на поле f2, но рассматривал лишь его прямолинейный маршрут Крf4—f3—f2, полагая, что и здесь успеет пойти Кe6 и Kd4+ с ничьей. Каково же было его изумление, когда неприятельский король действительно отправился к полю f2, но не по прямому пути! После **57...Крg3!!** белым пришлось сдаться, так как пешку e3 невозможно остановить: на 58.Кe6 следует 58...e2, и белый конь попадает на d4 без шаха (59.Крd2 Крf2!).

Матч Ботвинника со Смысловым (1954 г.) был двадцатым по счету и последним, закончившимся вничью (12:12). Счет в матче менялся по синусоиде: сначала Ботвинник выиграл три партии при одной ничьей, а затем четыре победы при нескольких ничьих одержал Смыслов. 12-я партия игралась при счете 6:5 в его пользу.

Ботвинник — Смыслов

Смыслов был настроен здесь весьма оптимистично. Действительно, при отступлении ферзя **31**.Фg2 следует 31...К:f6, и позиция белых трещит по всем швам, поскольку их пешки безнадежно слабы. **31.f7+!** Неприятный геометрический сюрприз. Бить пешку королем нельзя из-за Ф:g7+ (пересечение седьмой горизонтали и линии g). Последовало **31...Л:f7** **32.Фd8+Крh7** **33.С:d5** (пересечение вертикали d и диагонали a2—g8!) **33...Кf2+** **34.Крg2** **Фf6** **35.Ф:f6** **Л:f6** **36.Кр:f2** **Л:f5+** **37.Сf3** **Лf4** **38.Лg4. Черные сдались.** Счет сравнялся, вторая половина матча, как и первая, закончилась вничью, и чемпион мира вновь сохранил свое звание.

Напоминаем, что в нашем шахматном конкурсе объявляется перерыв на летние каникулы. Новые задания будут предложены вам в «Кванте» № 8.

Интерференция света

1. $d_2=\sqrt{3}\,d_1\approx 3{,}5$ мм.

2. $l=d\dfrac{D/a+1}{D/a-1}\approx 122$ см (рис. 1).

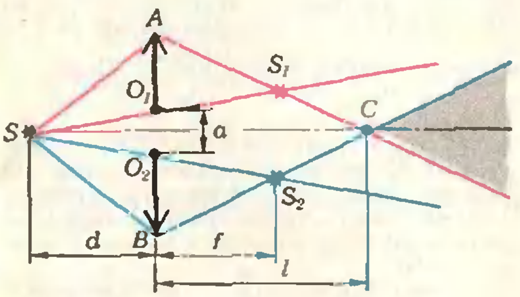


Рис. 1.

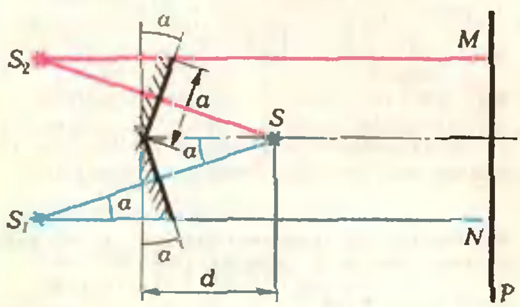


Рис. 2.

3. $a\geqslant 2d\sin\alpha\approx 2d\alpha\approx 2$ см. Указание. Минимальный размер зеркала соответствует параллельному ходу лучей S_1N и S_2M, проходящих через края зеркал (рис. 2).

Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $y=-\dfrac{1}{x_0^2}x+\dfrac{2}{x_0}+1$, где $x_0=\dfrac{2}{b-1}$ при $a=0$, $b\neq 1$; $x_0=\dfrac{a}{2}$ при $a\neq 0$, $b=1$; $x_0=\dfrac{1}{b-1}$ при $a\neq 0$, $b=1+\dfrac{1}{a}$ (в этих случаях — одна касательная); $x_0=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+a(1-b)}}{1-b}$ при $a>0$, $b\neq 1$, $b<1+\dfrac{1}{a}$ и при $a<0$, $b\neq 1$, $b>1+\dfrac{1}{a}$ (в этих случаях — две касательные). В остальных случаях ($a=0$, $b=1$; $a>0$, $b>1+\dfrac{1}{a}$; $a<0$, $b<1+\dfrac{1}{a}$) искомой касательной не существует.

2. Могут, тупоугольный; $\arccos\dfrac{101}{108}$, $\arccos\dfrac{61}{72}$, $\pi-\arccos\dfrac{29}{48}$.

3. $\{4\}$.

4. $\dfrac{1}{8\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)}\times$
$\times\sqrt{3a^4-2\sqrt{3}\,a^2b^2+b^4(1+12\sin^2\alpha)}$.

Вариант 2

1. 30 км/ч.
2. 15 см.
3. $\left]-\dfrac{4}{3};\ \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}\right[\ \cup\ \left]\dfrac{3+\sqrt{17}}{2};\ +\infty\right[$.

Вариант 3

1. $4\sqrt{3}$ см^2.
2. $p_1=0$, $q_1=0$; $p_2=1$, $q_2=-2$.
3. $\sin\widehat{AOD}=\sin\widehat{DOC}=\sin\widehat{COB}=\dfrac{24}{25}$, $\cos\widehat{AOD}=\cos\widehat{COB}=-\dfrac{7}{25}$, $\cos\widehat{DOC}=\dfrac{7}{25}$.
4. $]-\infty;\ -5[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$.

Задачи устного экзамена

1. $401^2\cdot\log_2 3$. 2. $A\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{3}{4}\right)$. 3. $-\dfrac{13}{32}$.
4. $0\leqslant x\leqslant 1$, $y=-x+1$ и $-1\leqslant x<0$, $y=-x-1$.
5. $\varnothing$. 6. $y=-x+\ln 4-2$. 7. $a_1=1$, $d=3$.
8. Длины последовательных звеньев построенной бесконечной ломаной образуют убывающую геометрическую прогрессию. Под «длиной бесконечной ломаной» подразумевается сумма этой прогрессии. Ответ. $a(2+\sqrt{3})$.
9. $[4;\ +\infty[$. 10. $\left]-\dfrac{15}{4};\ +\infty\right[$. 11. $y=12x-16$. 12. 3, 5, 7 или 4, 5, 6 или 5, 5, 5. 13. +. 14. $\{1-\sqrt{2}\}$. 15. 16. 16. +. 18. $\dfrac{\pi}{3}$.
19. $]-\infty;\ -3]$. 20. $\vec{a}\,(3;\ 2)$.

Азербайджанский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

2. $x_1=\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi}{6}k$, $x_2=\dfrac{\pi}{12}+\pi l$ $(k, l\in\mathbb{Z})$.
3. $\left]\dfrac{2}{3};\ 1\right[\ \cup\ ]2;\ 6[$. 4. $1\dfrac{1}{3}$. 5. $\dfrac{1}{4}$.

Вариант 2

1. $\arccos(\sqrt{2}-1)$. 2. $\{(4;\ 1)\}$. 4. $\max\limits_{[0;\,2]} f(x)=f(2)=2\dfrac{2}{3}$, $\min\limits_{[0;\,2]} f(x)=-2\dfrac{2}{3}$.

Вариант 3

1. $\dfrac{\pi}{3}$. 2. $\{(2;\ 3;\ 1)\}$. 4. $12-5\ln 5$. 5. $F\sqrt{3+6\cos\varphi}$.

Вариант 4

1. $a^2\cdot\dfrac{(1+\operatorname{ctg}\alpha)^2\cdot(1+\sin\alpha)}{\cos\alpha}$. 2. $x_1=0$,

$y_1=0$; $x_2=3\frac{1}{3}$, $y_2=1\frac{1}{3}$; $x_3=-\frac{3}{4}$, $y_3=-\frac{3}{10}$.
3. $]3;4[\,\cup\,]7;+\infty[$. 4. $]-\infty;-3]\,\cup$ $\cup\,]2;+\infty[$. 5. -5.

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. $\frac{\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(4+\mathrm{tg}^2\alpha)^{3/2}}b^3$. 2. $]2;4[$. 3. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. 4. $\max\limits_{\mathbf{R}} y=4$.

Вариант 2

1. $\frac{1}{2}\pi(1+2\sin\alpha)l^2$, $\frac{1}{12}\pi\sin\alpha(1+2\sin^2\alpha)l^3$. Замечание. Те, кто не знают нужных формул для усеченного конуса, могут достроить его до «полного» конуса и найти искомые величины как разность этих величин для полного конуса и конуса-верхушки. 2. $\frac{9}{2}$.
3. $\left]-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right[\,\cup\,\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$. 4. $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{3}+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

Вариант 3

1. $\frac{a^3-b^3}{24}\mathrm{tg}\,\alpha$, $\frac{\sqrt{3}}{2\cos\alpha}\left(a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}-b^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$. Замечание. См. замечание к задаче 1 варианта 2. 2. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
3. $]-\infty;-20[\,\cup\,]23;+\infty[$. 4. $\frac{1}{2}$.

Задачи устного экзамена

1. а) $\left\{61, -\frac{7}{5}\right\}$; б) $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{24}+\frac{\pi}{4}k$ $(k\in\mathbf{Z})$. 2. а) $]-2;-1[\,\cup\,]-1;0[\,\cup\,]0;1[\,\cup$ $\cup\,]2;+\infty[$; б) $\left]\frac{\pi}{12}+2\pi k;\ \frac{17}{12}\pi+2\pi k\right[$ $(k\in\mathbf{Z})$; в) $\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup[-1;1]\cup$ $\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$. 3. а) 1; б) $-\sqrt{2}$. 4. а) Область определения $\mathbf{R}$; периодическая (период π); промежутки возрастания: $\left[\frac{5}{8}\pi+\pi k;\ \frac{9}{8}\pi+\pi k\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$, промежутки убывания: $\left[\frac{\pi}{8}+\pi k;\ \frac{5}{8}\pi+\pi k\right]$ $(k\in\mathbf{Z})$, точки максимума: $x=\frac{\pi}{8}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$, точки минимума: $x=\frac{5}{8}\pi+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. б) Область определения $\mathbf{R}$; четная; промежуток убывания $]-\infty;0]$, промежуток возрастания $[0;+\infty[$, $x=0$ — точка минимума. 5. $]2\pi k;\ \pi+2\pi k[$ $(k\in\mathbf{Z})$. 6. $\frac{2}{3}$. 7. $y=-4x$, $y=4x-8$. 8. 0. 9. $-\frac{1}{3}$ или -3. 10. $\sin 1980^\circ$. 11. $y=\frac{2}{3}x+1$. 12. 1. 13. 20. 14. 69 или 87.

Физика

3. $\lambda_{max}=hc/A\approx 8{,}9\cdot 10^{-7}$ м (здесь $c=3\times\times 10^8$ м/с — скорость света).

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

1. 27. 2. $]-\infty;-1[\,\cup\,]-1;\frac{1}{2}[$. 3. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x_2=(-1)^l\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.
4. Определена на $\mathbf{R}$; нечетная; возрастает на $[-1;1]$, убывает на $]-\infty;-1]$ и на $[1;+\infty[$, $x=-1$ — точка минимума, $x=1$ — точка максимума. 5. $\frac{1}{6}b^3\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{ctg}\,\varphi$.

Физика

1. $|\vec{F}|=p_{ср}S=\rho gdh^2/2=1{,}25\cdot 10^6$ Н. Замечание. Не все абитуриенты учитывали, что следует брать среднее значение давления воды на плотину, равное среднему арифметическому значению давления в нижней и верхней точках.
2. $Q=m|\vec{v}|^2/2=10^5$ Дж. Замечание. Многие, не решившие эту задачу, не сообразили воспользоваться законом сохранения энергии.
3. $A=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{d_0}\right)=31{,}5\cdot 10^{-6}$ Дж. Замечание. Самая характерная ошибка — использование формулы $A=|\vec{F}||\vec{s}|\cos\alpha$ без учета изменения силы взаимодействия зарядов по мере их сближения.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. $6\frac{1}{3}-\frac{3}{4\ln 2}$. 2. $x=\pm\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. 3. $\varnothing$. 4. $\frac{19\pi}{9}a^2$. 5. Тупоугольный. Указание. Одно из скалярных произведений $\vec{AB}\cdot\vec{AC}$, $\vec{BA}\cdot\vec{BC}$, $\vec{CA}\cdot\vec{CB}$ отрицательно.

Вариант 2

1. 3,5 и -2. 2. $\max\limits_{[-3;0]} y=y(-3)=y(0)=0$, $\min\limits_{[-3;0]} y=y(-1)=-4$. 3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\mathrm{arctg}\,2+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. 4. $\frac{\sqrt{3}}{2(4\,\mathrm{tg}^2\alpha+1)\cos\alpha}l^2$.
Указание. При помощи теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника («Геометрия 9—10», §50) выразите искомую площадь через сторону основания. Из соответствующего треугольника выразите сторону основания через l.

Вариант 3

1. 9. 4. $\frac{1}{2}l^2\cos\alpha$. Указание. См. указание к задаче 4 варианта 2.

Вариант 4

1. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k\ (k\in Z)$. 2. $]-1;0[$. 3. $4\frac{1}{2}$. 4. $\frac{a^3}{6}$.

Физика

1. $t=\sqrt{\frac{h}{g}\frac{m_1+m_2}{m_2-m_1}}\approx 0{,}72$ с.

2. $|\vec{F}|=\frac{\mu mg}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 20$ Н.

3. $|\vec{T}|=mg\left(\frac{|\vec{v}_0|^2}{gl}+3-2\cos\alpha\right)=4$ Н.

4. $T=2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}\approx 0{,}44$ с.

5. $m=\frac{\varrho_в\varrho_л Sh}{\varrho_в-\varrho_л}\approx 3{,}5$ кг.

6. Длина части сосуда, занимаемой кислородом,

$l_1=l\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{H_2}+\mu_{O_2}}=5$ см.

7. $\lambda=c(t_к-t_0)\tau_2/\tau_1=2{,}24\cdot 10^6$ Дж/кг.

8. $\frac{P_1}{P_2}=\frac{(R_1R_2+r(R_1+R_2))^2}{(R_1+r)^2R_2^2}=1{,}6$.

9. $r=\sqrt{R_1R_2}=1$ Ом.

10. Возможны два случая: а) $F=\frac{3}{4}d=7{,}5$ см, при этом изображение предмета действительное; б) $F=\frac{3}{2}d=15$ см, при этом изображение предмета мнимое.

Одесский государственный педагогический институт им. К. Д. Ушинского (физико-математический факультет)

Математика

Вариант 1

1. $6h^2$. 2.* $\max\limits_{[0;10]} y=y(5)=5$, $\min\limits_{[0;10]} y=y(0)=y(10)=0$.

3. $\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}$. 4. $]1;2[$.

Вариант 2

1. $\frac{9}{16}$. 2. На промежутках $]-\infty;0[$ и $]2;+\infty[$ функция убывает, на промежутке $]0;2[$ возрастает. 3. $\operatorname{tg}\alpha$. 4. 7.

Физика

1. Период колебаний маятника увеличится в $\sqrt{\frac{M_З}{M_М}\left(\frac{R_М}{R_З}\right)^2}\approx 1{,}6$ раза.

2. $H=h\frac{\varrho_2}{\varrho_2-\varrho_1}=14$ м.

3. $p_1=\frac{p(V_1+V_2)-p_2V_2}{V_1}=1100$ кПа.

4. $\mathcal{E}=\frac{|\vec{B}_1|-|\vec{B}_2|}{\Delta t}S=1{,}6\cdot 10^{-3}$ В.

5. $\lambda_{max}=\frac{hc}{A}\approx 6\cdot 10^{-7}$ м $=600$ нм (здесь $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Волгоградский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{4\pi}{3\sin^2 2\varphi}a^2$. 2. $]0;3[\cup]3;6[$. 3. $\sin^2 4\alpha$. 4. $\{1,2\}$. 5. -2.

Вариант 2

1. $\pi l^2\sin\alpha$. 2. Единственная точка экстремума $x=-1$ (точка минимума). 3. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}l\ (k,l\in Z)$. 4. $]-3;-2[\cup]2;8[$. 5. $|v|=12$ м/с.

Физика

1. $\tau=\frac{|\vec{v}|}{\mu g}\approx 3{,}4$ с; $l=\frac{|\vec{v}|^2}{2\mu g}\approx 34$ м.

2. $|\vec{v}_1|=2|\vec{v}_2|$.

3. $M=RV^2/G\approx 2\cdot 10^{30}$ кг.

4. $M=l\pi d^2(\varrho_в-\varrho)/4\approx 74$ кг (здесь $\varrho_в=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

5. $T_2=0{,}67T_1\approx 288$ К.

6. $I=\frac{c\varrho V(t_2-t_1)}{\eta U\tau}100\%\approx 5{,}3$ А (здесь $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды, $t_2=100$°С — температура кипения воды).

7. $\tau_{посл}=\tau_1+\tau_2=30$ мин; $\tau_{пар}=\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}\approx 6{,}7$ мин.

8. $\mathcal{E}=B_в l|\vec{v}|=0{,}3$ В.

9. $T_Л/T_З\approx 2{,}4$.

10. $R=\frac{h}{\sqrt{n^2-1}}\approx 1{,}1$ м.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k\ (k\in Z)$. 2. $\left\{8,\frac{1}{8}\right\}$. 3. $1\frac{1}{8}$. 4. 20°.

Указание. Примените теорему синусов к треугольникам ABM и ACM или воспользуйтесь тем, что если сторона AC видна из точки M под углом 30°, а из точки B — под углом 60°, то $\angle AMC$ — вписанный в Окр$(B,|AB|)$.

Вариант 2

1. $\left\{7,-5\frac{3}{5}\right\}$. 2. $]4;+\infty[$. 3. $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}$.

4. $y=x+4$ и $y=-x+4$. Указание. Поскольку данная функция — четная, искомые касательные к ее графику симметричны относительно оси ординат.

Физика

1. $k=\frac{2mg(l+\Delta l)}{\Delta^2}=30$ Н/м.

2. $|\vec{F}_\text{д}|=\frac{4m_1m_2}{m_1+m_2}(g+|\vec{a}|)\approx 5{,}3$ Н.

3. $Q=5/2pS\Delta h=12$ кДж.

4. $T_2=T_1\left(1+\frac{2A}{3p_1V_1}\right)\approx 284$ К.

5. $W_0=\frac{e|\vec{E}|l}{2\sin 2\alpha}\approx 3{,}7\cdot 10^{-16}$ Дж.

6. $\delta=\frac{\varepsilon(1-|\vec{E}|/|\vec{E}_\text{пр}|)}{\varepsilon-1}=\frac{2}{3}$.

7. $|\vec{B}|=\frac{|\vec{E}|}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{m_e}{2W}}\approx 4{,}3$ мТл; индукция магнитного поля перпендикулярна к плоскости, в которой лежат векторы скорости электрона и напряженности электрического поля.

8. $I_{м2}=I_{м1}\sqrt{L_1/L_2}=I_{м1}/\sqrt{2}$.

9. $F_2=(d_1+F_1)F_1^2/d_1^2\approx 9{,}4$ см.

10. $t=\frac{m_e|\vec{v}|^2\varepsilon_0S_1}{2e^2dn}\approx 0{,}16$ мкс.

Московский архитектурный институт

Математика

3. $\{100\}$. 4. $\left\{\left(\frac{5}{4};-\frac{3}{4}\right),\ \left(-\frac{1}{4};-\frac{9}{4}\right)\right\}$.

5. $\left]\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right[\quad \left]1;2^{\sqrt{2}}\right[$. 7. 0. 8. $y=\frac{2}{3}x$.

9. $\frac{\sqrt{S}}{2}\cdot\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1}$.

Физика

1. $h=R/3$.

2. $h<l\left(\frac{T}{2mg}-\frac{1}{2}\right)=2{,}5$ м.

3. Возможны два случая: 1) $\varphi=0$, при этом равновесие шарика будет устойчивым при любой угловой скорости ω; 2) $\varphi=\arccos\frac{g}{\omega^2R}$, при этом равновесие будет устойчивым, если $\omega<\sqrt{g/R}$.

4. $|\vec{F}_\text{ср}|=Mg(1+h/s)\approx 3\cdot 10^5$ Н;

$t=\frac{2s}{\sqrt{2gh}}\approx 8\cdot 10^{-3}$ с.

5. $\mu=\frac{\sin 2\alpha}{1+2\sin^2\alpha}=0{,}5$.

6. $|\vec{F}|=ES\alpha\Delta t=7{,}56\cdot 10^4$ Н.

7. $|Q|=\frac{1+2\sqrt{2}}{4}q$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 4)

1. 288 + 72 = 360

| + |

144 − 24 = 120

|| || ||

144 + 96 = 240

2. По формуле n^3-n^2 $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Пропущено число $5^3-5^2=100$.

3. См. рисунок 3.

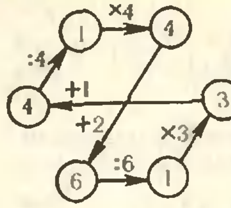


Рис. 3.

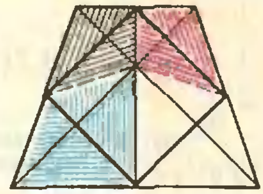


Рис. 4.

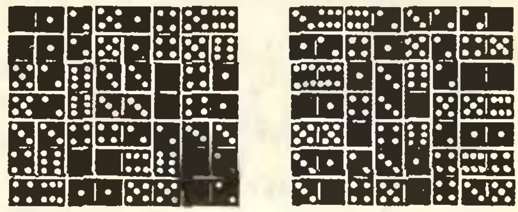


Рис. 5.

4. Соединив середины сторон трапеции, получим квадрат (рис. 4), площадь которого равна $h^2/2$, где h — длина высоты трапеции. С другой стороны, площадь этого квадрата в два раза меньше площади трапеции (треугольники одинакового цвета конгруэнтны).

5. Поскольку сумма цифр числа M делится на 3 (она равна $1980+2\cdot 1983=5946$), само число M также делится на 3. Если $M=n^3$, то и n делится на 3, откуда M делится на 27, а потому и на 9. Но это не так, поскольку сумма цифр числа M на 9 не делится. Значит, M не может быть точным кубом.

6. См. рисунок 5.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Черневская

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 18.4.81
Подписано к печати 27.5.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,88 Т-20059
Цена 30 коп. Заказ 912
Тираж 237 593 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Звери на базаре

Птицы, звери и жуки
Покупали башмаки:
Скуповатые фламинго
Взяли каждый по ботинку,
Леопард и ягуары
Надевали по две пары,
А когда являлся жук,
Сразу требовал шесть штук.
Всяк, кто был в тот день на рынке,
Приобрел себе ботинки.
И довольный продавец
Расщедрился под конец:
Птице, зверю и жуку
Подарил по колпаку.
Возвращаясь, стар и млад
Был своей обновке рад.
Опустел в момент базар:
Раскупили весь товар.
Запирая свой ларек,
Продавец подвел итог:
Продал сорок башмаков,
Выдал десять колпаков.
Сколько ж было на базаре
Птиц, животных и жуков?

В. Илларионов

Цена 30 коп.

Индекс 70465

Эти «сферические купола» построены из переплетенных (но не склеенных) между собой бумажных колец.

В нижнем ряду — фотографии одного и того же купола, снятого из двух разных точек. Этот купол составлен из шести колец. Читатель, знакомый с полуправильными многогранниками («Квант», 1978, № 1, с. 8 и 1980, № 12, с. 9), узнает в его облике икосододекаэдр (его гранями являются 20 правильных треугольников и 12 правильных пятиугольников).

В верхнем ряду слева показан еще один купол из шести колец, а справа — из десяти. Все эти фигуры обладают богатой *группой симметрий* (то есть самосовмещаются многими разными способами; в частности, любое кольцо можно перевести в любое другое). Прочувствовать это можно, изготовив подобные модели самостоятельно, а лучше понять — прочитав указанные выше статьи и статью в «Кванте», 1980, № 7, с. 9.

О. Боднар